

Doctorat de Mathématiques de
l'Université de Cergy-Pontoise

Formulations mixtes hybrides pour le problème de
la magnéto-statique dans \mathbb{R}^3 obtenues en couplant
une méthode d'éléments finis conforme avec
une méthode intégrale

Mohamed MENAD

Thèse soutenue le 05 octobre 2005 devant le jury composé de :

| | |
|------------|---------------------|
| E.LOGAK | Président. |
| H.H.RUGH | Directeur de thèse. |
| C.DAVEAU | Co-encadrant. |
| G.CALUZ | Rapporteur. |
| S.NICAISE | Rapporteur. |
| F.DEMENGEL | Examineur. |
| P.SOUDAIS | Examineur. |

Remerciements

Je tiens à remercier Elisabeth Logak de présider ce jury de thèse.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à Rugh Hans Henrik, pour la confiance qu'il m'a témoigné tout au long de cette thèse, pour son soutien constant et pour avoir accepté la responsabilité de diriger mon travail.

Je tiens à remercier chaleureusement Daveau Christian, pour lequel j'ai beaucoup appris, pour son aide et son esprit critique.

Je suis très honoré que Gabriel Caloz et Serge Nicaise aient accepté la charge de rapporter ce travail.

Je remercie également Françoise Demengel et Paul Soudais d'avoir accepté de faire partie de jury.

Merci à toutes les personnes qui m'ont aidé particulièrement El Mahjoub Tarkany.

Enfin, je tiens ici, à avoir une pensée pour ma famille, dont le soutien m'est précieux.

Introduction

Le sujet de cette thèse est la résolution du problème de la magnéto-statique. Il a fait l'objet de nombreuses recherches et les méthodes de résolution sont multiples : on peut modéliser le problème en dimension trois et appliquer des schémas numériques à l'aide des éléments finis de Lagrange en introduisant un potentiel scalaire ou vecteur, ou bien on peut se ramener à un problème à deux champs par le biais de formulations mixtes cf Kikuchi [25] et Bossavit [4].

Le choix de formulations mixtes dans la résolution d'équations aux dérivées partielles est historiquement assez ancien et a connu un essor très important suite aux travaux de P. A. Raviart et J. M. Thomas [35], pour des problèmes elliptiques d'ordre deux, de F. Brezzi et P. A. Raviart [36], et de R. Scholtz [37] pour des problèmes elliptiques d'ordre quatre.

Les formulations mixtes sont caractérisées par une difficulté spécifique : elles font intervenir de façon naturelle deux champs inconnus dont l'un joue le rôle de multiplicateur de Lagrange associé à une contrainte ; la discrétisation de ces deux champs ne peut se faire de manière indépendante. Le choix de formulation mixte pour résoudre le problème de la magnéto-statique paraît naturel dans le sens où on doit résoudre à la fois $\operatorname{div} b = 0$ et $\operatorname{rot} h = j$.

L'idée de départ de cette thèse était d'utiliser des formulations mixtes couplées avec une méthode intégrale pour résoudre le problème de la magnéto-statique dans un cas général c'est à dire sans condition aux limites, avec pour base les travaux de A. Bossavit, [5]. Dans les formulations proposées dans [5], la méthode intégrale fait intervenir un opérateur intégral dont la discrétisation aboutit à une matrice pleine. Elle fait intervenir une nouvelle inconnue sur le bord dont une difficulté est le choix de l'élément fini pour la discrétiser, car il doit en effet tenir compte de conditions de continuité sur le bord. En outre l'opérateur discret ne conserve pas toutes les propriétés de l'opérateur continu qui sont nécessaires pour que la formulation discrète soit bien posée.

Le premier objectif de cette thèse a été d'obtenir une formulation mixte couplée avec une méthode intégrale dont la matrice du schéma numérique s'obtient directement par une méthode de Galerkin comme dans [26].

Le deuxième objectif était d'établir une formulation qui utilise un opérateur intégral sans faire intervenir de nouvelle inconnue sur le bord.

Le dernier objectif dans ce domaine était de présenter des méthodes de discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Steklov alternatives à celle proposée par A. Bossavit et de les comparer.

D'autre part, les méthodes discontinues de Galerkin connaissent un essor très important suite aux travaux de A. Douglas et al. [19] et de S. Prudhomme et al. [34] pour le problème de Dirichlet et de I. Perugia et al [33], [32] pour la résolution des équations de Maxwell. La liste n'est pas exhaustive car il y a une profusion d'articles actuellement sur la méthode discontinue de Galerkin. Un objectif de cette thèse a été d'établir des formulations discontinues de Galerkin pour le problème de la magnétostatique avec des conditions aux limites et de les étudier.

Le document se présente en trois grandes parties :

- 1. On établit des problèmes de type point selle posés dans \mathbf{R}^3 pour le problème de la magnétostatique dont l'une des inconnues est le champ magnétique puis l'induction magnétique. On transforme les formulations en couplant la méthode mixte avec une méthode intégrale. Le couplage est assuré en exploitant la continuité de la composante tangentielle (resp normale) du champ magnétique (resp de l'induction). On discrétise ensuite en utilisant une méthode d'éléments finis conforme. Des résultats numériques sont donnés pour valider les formulations.
- 2. On propose trois méthodes de discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Steklov. L'une est basée sur une technique d'éléments infinis, une autre sur l'utilisation de la théorie intégrale et la dernière sur l'emploi des équations de Calderon. Des résultats numériques sont donnés pour pouvoir les comparer.
- 3. On établit des formulations discontinues du problème de la magnétostatique en faisant intervenir un potentiel vecteur. On montre que ces formulations sont consistantes et on obtient une estimation de l'erreur en utilisant des techniques standard.

Première partie

Etablissement de formulations pour le problème de la magnétostatique

Introduction

Dans le premier chapitre de cette partie, on commence par présenter le modèle physique de la magnétostatique et on récapitule brièvement les espaces fonctionnels nécessaires pour établir les formulations variationnelles.

Dans le chapitre 2, on présente une première formulation mixte de la magnétostatique où le champ magnétique est l'inconnue principale. L'étude mathématique de cette formulation est faite en détail. Ensuite, on présente une méthode de couplage qui permet de reformuler le problème sur le domaine de calcul. Cette technique n'est pas nouvelle, cf. [23], [24], [14] et [3]. Le principe de notre méthode de résolution est le suivant : on écrit $h = \nabla\psi$ où ψ est un potentiel scalaire à l'extérieur du domaine et avec les équations de Calderon, on ramène le problème extérieur sur le bord du domaine. On montre que le problème est bien posé.

Une deuxième formulation mixte est proposée dans le chapitre 3 dont une des inconnues est l'induction magnétique. La méthode intégrale de frontière utilise cette fois-ci l'opérateur de Neumann-Dirichlet. L'étude de l'existence et de l'unicité de la solution de la formulation est faite.

Dans le chapitre suivant, on présente une autre formulation mixte ayant b comme inconnue mais l'approche intégrale est différente. En effet, on pose $b = \text{rot } u$ à l'extérieur du domaine de calcul et on définira de nouveaux opérateurs pour la méthode intégrale. On détaille ensuite l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution pour ce problème variationnel.

Le chapitre 5 est consacré à la discrétisation des différentes formulations et l'accent est mis sur le choix des éléments finis qui respectent les propriétés physiques du champ calculé. On établit ensuite l'existence et l'unicité des solutions pour les différentes formulations.

Le chapitre 6 est consacré aux résultats numériques pour deux des formulations définies précédemment.

Chapitre 1

Modèle physique et cadre fonctionnel

Dans ce chapitre, on commence par présenter le modèle physique de la magnétostatique et on récapitule brièvement les espaces fonctionnels nécessaires pour établir les formulations variationnelles.

1.1 Le modèle de la magnétostatique

Le conducteur est représenté par un domaine borné $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ qui est supposé simplement connexe ainsi que son complémentaire Ω' dans lequel se trouve un inducteur Ω^s , (voir figure 1.1).

L'inducteur est parcouru par un courant j indépendant du temps qui crée un champ source noté h^s . Ce champ source vérifie les équations :

$$\operatorname{rot} h^s = j \text{ dans } \mathbf{R}^3, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} h^s = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^3. \quad (1.2)$$

Ainsi, le champ total h et le champ de réaction h^r , dû à la présence de Ω , vérifient $h = h^r + h^s$ et $\operatorname{rot} h^r = \operatorname{rot}(h - h^s) = 0$ dans \mathbf{R}^3 . A l'extérieur du domaine Ω , la perméabilité μ est constante et vaut μ_0 la perméabilité du vide. A l'intérieur du domaine, μ est une fonction de $x = (x_1, x_2, x_3)$ strictement positive.

D'autre part, la frontière Γ de Ω est supposée simplement connexe et lipschitzienne. On note n le vecteur unitaire normal sortant à Γ .

Le point de départ de notre étude est le problème de la magnétostatique dans \mathbf{R}^3 qui s'écrit :

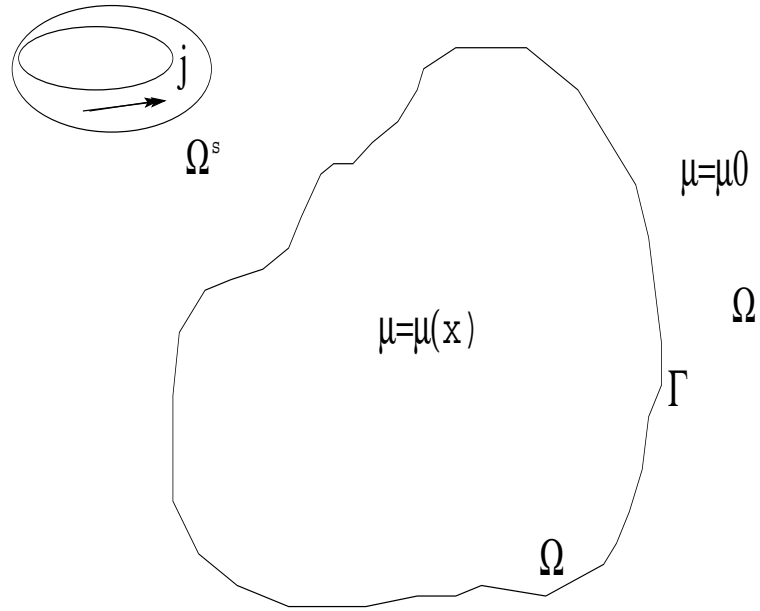


FIG. 1.1 – Situation physique typique

pour un j donné, trouver un couple (b, h) solution de :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} h = j, \\ \operatorname{div} b = 0, \\ b = \mu h \end{cases}$$

avec b l'induction magnétique.

On va introduire le cadre fonctionnel utile pour établir les formulations mixtes que l'on établira par la suite.

1.2 Notations et cadre fonctionnel

On note $(u, v)_{L^2(\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} uv dx$ le produit scalaire dans $L^2(\mathcal{O})$ et $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{O})}$ la norme associée. Ici \mathcal{O} est un ouvert de \mathbf{R}^3 qui peut être un domaine borné ou \mathbf{R}^3 . On introduit les espaces fonctionnels suivants :

- $H^1(\mathcal{O})$ est l'espace de Sobolev d'ordre 1 muni de sa norme naturelle $\|\cdot\|_{1, \mathcal{O}}$
- $H(\operatorname{rot}; \mathcal{O})$ est l'espace des champs u avec $\nabla \times u \in L^2(\mathcal{O})^3$ muni de la norme du graphe :

$$\|v\|_{H(\operatorname{rot}; \mathcal{O})}^2 = \|v\|_{L^2(\mathcal{O})^3}^2 + \|\operatorname{rot} v\|_{L^2(\mathcal{O})^3}^2.$$

- $H(\operatorname{div}; \mathcal{O})$ est l'espace des champs u avec $\nabla \cdot u \in L^2(\mathcal{O})$, muni de la norme du graphe :

$$\|v\|_{H(\operatorname{div}; \mathcal{O})}^2 = \|v\|_{L^2(\mathcal{O})^3}^2 + \|\operatorname{div} v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2.$$

• $H(\text{rot}^0; \mathcal{O})$ et $H(\text{div}^0; \mathcal{O})$ sont les sous espaces de $H(\text{rot}; \mathcal{O})$ et de $H(\text{div}; \mathcal{O})$ à rotationnel (resp divergence) nulle dans \mathcal{O} .

Lorsque l'ouvert \mathcal{O} est borné, on note

• $H_0^1(\mathcal{O})^3$, $H_0(\text{rot}; \mathcal{O})$ et $H_0(\text{div}; \mathcal{O})$ les espaces des champs qui ont une trace, une trace tangentielle et une trace normale nulle respectivement. On pose

$$H_0(\text{rot}^0; \mathcal{O}) \stackrel{\text{def}}{=} H(\text{rot}^0; \mathcal{O}) \cap H_0(\text{rot}; \mathcal{O})$$

$$H_0(\text{div}^0; \mathcal{O}) \stackrel{\text{def}}{=} H(\text{div}^0; \mathcal{O}) \cap H_0(\text{div}; \mathcal{O})$$

Pour le domaine extérieur \mathcal{G} qui peut être \mathbf{R}^3 on introduit l'espace de Beppo-Levi :

$$W^1(\mathcal{G}) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathcal{D}'(\mathcal{G}) ; \frac{v}{\sqrt{1+||x||^2}} \in L^2(\mathcal{G}) ; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\mathcal{G}), i = 1, 2, 3\}.$$

et il sera muni de la norme

$$||v||_{W^1(\mathcal{G})} = \left(\int_{\mathcal{G}} \frac{v^2}{1+||x||^2} dx + \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{G}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

La semi norme $||\nabla(\cdot)||_{L^2(\mathcal{G})}$ est une norme dans $W^1(\mathcal{G})$ équivalente à la norme naturelle, autrement dit, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left\| \frac{v}{\sqrt{1+||x||^2}} \right\|_{L^2(\mathcal{G})}^2 + ||\nabla v||_{L^2(\mathcal{G})}^2 \leq C ||\nabla v||_{L^2(\mathcal{G})}^2 \quad \forall v \in W^1(\mathcal{G}).$$

On introduit maintenant les espaces de trace suivants :

$$H^{1/2}(\Gamma) = \{v|_{\Gamma} ; v \in H^1(\mathcal{O})\},$$

Le dual de $H^{1/2}(\Gamma)$ est noté $H^{-1/2}(\Gamma)$. On introduit l'espace fonctionnel

$$H_*^{1/2}(\Gamma) = \{v \in H^{1/2}(\Gamma) ; \langle v, 1 \rangle = 0\}$$

\langle , \rangle indique le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ qui est le prolongement du produit scalaire dans $L^2(\Gamma)$ c'est à dire $\langle u, v \rangle = \int_{\Gamma} u(s)v(s)ds$ pour des fonctions u et v suffisamment régulières. On sait que l'application trace γ est continue et surjective de

$$H^1(\mathcal{O}) \text{ dans } H^{1/2}(\Gamma).$$

Enfin on rappelle le résultat suivant, [22] :

• si $v \in H(\text{div}; \mathcal{O})$, la trace de la composante normale de v ,

$$\gamma_{\tau} v = (v \cdot n)|_{\Gamma}$$

appartient à l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$,

• si $v \in H(\text{rot}, \mathcal{O})$, la trace de la composante tangentielle de v , est dans $(H^{-1/2}(\Gamma))^3$.

1.3 Les opérateurs surfaciques

Soit Γ une surface régulière, soit y_0 un point de Γ , et soit U un ouvert du plan tel qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de y_0 sur Γ , et une application ψ de U dans \mathcal{V} telle que :

$$\forall y \in \mathcal{V}, \text{ il existe un et un seul } x = (x_1, x_2) \in U, \text{ tel que } y = \psi(x).$$

Une base du plan tangent en tout point de \mathcal{V} est :

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}.$$

Soit

$$\begin{cases} g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j & \text{si } (i = 1, 2 \ j = 1, 2) \\ g_{i3} = 0 & \text{si } (i = 1, 2) \\ g_{33} = 1. \end{cases}$$

le tenseur métrique, en posant $g = \det(g_{i,j})$. On peut définir pour une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$

$$\nabla_{\Gamma} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,2} g_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \vec{e}_i$$

$$\mathbf{rot}_{\Gamma} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\Gamma} \varphi \times n$$

et pour un champ de vecteurs $u = (u_1, u_2)$ de $\mathcal{D}(\Gamma)^2$ tangent à Γ , on définit :

$$\text{div}_{\Gamma} u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1,2} \frac{\partial \sqrt{g} u_i}{\partial x_i}$$

$$\mathbf{rot}_{\Gamma} u \stackrel{\text{def}}{=} \text{div}_{\Gamma} (u \times n).$$

Pour une distribution scalaire T , nous avons les relations :

$$\langle \nabla_{\Gamma} T, \vec{a} \rangle_{\Gamma} = - \langle T, \text{div}_{\Gamma} \vec{a} \rangle_{\Gamma}$$

$$\langle \mathbf{rot}_{\Gamma} T, \vec{a} \rangle_{\Gamma} = \langle T, \mathbf{rot}_{\Gamma} \vec{a} \rangle_{\Gamma}.$$

Les vecteurs tangents à Γ sont dans $\mathbf{L}_t^2(\Gamma) = \{v \in L^2(\Gamma)^3 ; n \cdot v = 0\}$.

Considérons l'espace $TH^{1/2}(\Gamma)$ constitué de traces tangentielles des éléments de $H^1(\Omega)^3$, ainsi que son dual $TH^{-1/2}(\Gamma)$. On introduit les deux espaces suivants :

$$H^{-1/2}(\text{div}_{\Gamma}; \Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in TH^{-1/2}(\Gamma) ; \text{div}_{\Gamma}(\lambda) \in H^{-1/2}(\Gamma)\},$$

$$H^{-1/2}(\mathbf{rot}_{\Gamma}; \Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in TH^{-1/2}(\Gamma) ; \mathbf{rot}_{\Gamma}(\lambda) \in H^{-1/2}(\Gamma)\}.$$

Ce sont des espaces de Hilbert munis des normes :

$$\|\lambda\|_{H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)}^2 := \|\lambda\|_{TH^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\text{div}_\Gamma(\lambda)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2,$$

$$\|\lambda\|_{H^{-1/2}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)}^2 := \|\lambda\|_{TH^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\text{rot}_\Gamma(\lambda)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

On aura recours aussi aux applications tangentielles : lorsque \mathcal{O} a pour frontière Γ

$$\gamma_t : \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})^3 \longrightarrow \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$$

$$q \longrightarrow (q|_\Gamma) \times n,$$

et

$$\pi_\tau : \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})^3 \longrightarrow \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$$

$$q \longrightarrow n \times (q|_\Gamma) \times n.$$

On a le résultat suivant.

Proposition 1.3.1 *Les applications γ_t et π_τ peuvent être prolongées en des applications linéaires surjectives de $H(\text{rot} ; \mathcal{O})$ dans $H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ et de $H(\text{rot} ; \mathcal{O})$ dans $H^{-1/2}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ respectivement.*

Le lien entre l'image de γ_t et celle de π_τ est donné par [26] :

Proposition 1.3.2 *Les espaces $H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma ; \Gamma)$ et $H^{-1/2}(\text{rot}_\Gamma ; \Gamma)$ sont duaux l'un de l'autre, l'espace $L^2(\Gamma)$ étant l'espace pivot.*

Enfin, on donne la formule de Green : pour $u, v \in H(\text{rot} ; \mathcal{O})$,

$$\int_{\mathcal{O}} \{\text{rot } u \cdot v - u \cdot \text{rot } v\} = \langle \gamma_t(v), \pi_\tau(u) \rangle.$$

1.4 Potentiels et équations de Calderon

On aura besoin pour une méthode de résolution des opérateurs de potentiel de simple couche V et de double couche K , de l'adjoint de K noté K' et de l'opérateur hypersingulier W donnés par :

$$V\lambda(x) = \int_{\Gamma} G(x, y)\lambda(y) ds_y \quad \forall \lambda \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

$$Ku(x) = \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) ds_y, \quad \forall u \in H^{1/2}(\Gamma),$$

$$K'\lambda(x) = \int_{\Gamma} \lambda(y) \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y) ds_y \quad \forall \lambda \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

$$Wu(x) = -\frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) ds_y \quad \forall u \in H^{1/2}(\Gamma),$$

où $G(x, y) = (4\pi\|x - y\|)^{-1}$ est la solution fondamentale de l'opérateur de Laplace dans \mathbf{R}^3 et $\frac{\partial}{\partial n_y}$ est la dérivée normale par rapport à la variable y . On rappelle ici certaines de leurs propriétés qui sont résumées dans le lemme suivant.

Lemme 1.4.1 *Les opérateurs précédemment définis :*

$$V : H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma),$$

$$K : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma),$$

$$K' : H^{-1/2} \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma),$$

$$W : H^{1/2} \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

sont linéaires et continus. V est symétrique, autoadjoint et défini positif.

W est symétrique, autoadjoint et semi défini positif si la capacité de Γ est plus petite que 1. L'adjoint de K est l'opérateur K' par rapport au produit de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Preuve. Voir [13] □

Remarque 1.4.1 *Pour la définition de la capacité de Γ , nous nous référons à [38] et mentionnons seulement ici que c'est équivalent à ce que Ω soit inclus dans une boule de rayon plus petit que 1.*

Lemme 1.4.2 *W est un isomorphisme de $H_*^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.*

Preuve. D'après [13] et [14], l'opérateur W est semi défini positif. Son noyau est constitué de fonctions constantes. Montrons qu'il est surjectif. Soit une fonction u_n de $H^{-1/2}(\Gamma)$, on considère le problème de Neumann intérieur (resp extérieur) qui a pour donnée u_n . D'après la formule de représentation en simple et double couche, on a $W([u]) = u_n$.

En outre, on déduit du théorème du graphe fermé que $W : H_*^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ est un isomorphisme. □

Soit ψ une fonction harmonique dans Ω' . On note φ sa trace sur Γ et λ sa dérivée normale. Nous avons les équations de Calderon sur Γ :

$$\varphi = \frac{1}{2} \varphi + K \varphi - V \lambda,$$

$$\lambda = -W\varphi + \frac{1}{2}\lambda - K'\lambda.$$

Grâce à la formule de Green, on a la représentation suivante pour $x \in \Omega'$:

$$\psi(x) = \langle K(x, \cdot), \varphi \rangle - \langle G(x, \cdot), \lambda \rangle. \quad (1.3)$$

Cette formule est encore valable si le domaine est lipschitzien.

1.5 Méthodes mixtes

1.5.1 Approximation de problème de point selle

Nous allons rappeler le cadre abstrait pour traiter les problèmes mixtes. Soit X et Q deux espaces de Hilbert munis respectivement de produits scalaires $(\cdot, \cdot)_X$ et $(\cdot, \cdot)_Q$. On se donne deux formes bilinéaires continues :

$$a(\cdot, \cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbf{R},$$

$$b(\cdot, \cdot) : X \times Q \longrightarrow \mathbf{R}.$$

et on considère le problème suivant : étant donnés $l_1 \in X'$ et $l_2 \in Q'$, déterminer un couple $(u, p) \in X \times Q$ solution de :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = \langle l_1, v \rangle & \text{pour tout } v \in X \\ b(u, q) = \langle l_2, q \rangle & \text{pour tout } q \in Q \end{cases}$$

Notons par $V = \mathbf{N}(b) = \{v \in X; b(v, q) = 0, \forall q \in Q\}$, le noyau de la forme bilinéaire b .

On a le résultat suivant dû à Brezzi, voir [7] :

Théorème 1.5.1 *Avec les hypothèses suivantes :*

1. *V-ellipticité : il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que :*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \text{ pour tout } v \in V,$$

2. *Condition inf-sup : il existe une constante $\beta \geq 0$ telle que :*

$$\sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_Q \text{ pour tout } q \in Q,$$

Alors, $\forall l_1 \in X'$ et $l_2 \in Q'$ il existe $(u, p) \in X \times Q$ unique tel que

$$a(u, v) + b(v, p) = \langle l_1, v \rangle \quad \forall v \in X$$

$$b(u, q) = \langle l_2, q \rangle \quad \forall q \in Q$$

en outre l'application $(l_1, l_2) \longrightarrow (u, p)$ est continue de $X' \times Q' \longrightarrow X \times Q$

Remarque 1.5.1 La démarche généralement utilisée pour vérifier la condition inf-sup est la suivante : on construit un opérateur $L \in \mathcal{L}(Q, X)$ tel que :

$b(L(v), v) = \|v\|_Q^2$. La condition inf-sup s'en déduit alors immédiatement : en effet posons $p = L(v)$ on a

$$b(p, v) = \|v\|_Q^2 = \|p\|_X \|v\|_Q \frac{\|v\|_Q}{\|p\|_X} \geq \|p\|_X \|v\|_Q \frac{1}{\|L\|}$$

d'où la condition inf-sup avec $\beta = \frac{1}{\|L\|}$

1.5.2 Approximation du problème

Soit X_h (resp. Q_h) un espace de dimension finie inclus dans X (resp. Q). L'indice h fait référence à un maillage utilisé pour la discrétisation du problème continu. L'approximation du problème continu, consiste à chercher $(u_h, p_h) \in X_h \times Q_h$ tel que

$$a(u_h, v) + b(v, p_h) = \langle l_1, v \rangle \quad \forall v \in X_h$$

$$b(u_h, q) = \langle l_2, q \rangle \quad \forall q \in Q_h$$

On a aussi le résultat suivant, [7].

Proposition 1.5.1 On note

$$V_h = \{v \in X_h ; b(v, p) = 0, \forall p \in Q_h\}.$$

Sous les hypothèses suivantes :

1. *V-ellipticité* : Il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \text{ pour tout } v \in V_h$$

2. *Condition inf-sup* : Il existe une constante $\beta \geq 0$ telle que :

$$\sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_Q \text{ pour tout } q \in Q_h$$

Alors $\forall l_1 \in X'$ et $l_2 \in Q'$ il existe $(u_h, p_h) \in X_h \times Q_h$ unique tel que

$$a(u_h, v) + b(v, p_h) = \langle l_1, v \rangle \quad \forall v \in X_h$$

$$b(u_h, q) = \langle l_2, q \rangle \quad \forall q \in Q_h$$

En outre, si les constantes α et β sont indépendantes de h , on a l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_X \leq c_1 \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + c_2 \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q,$$

où c_1 et c_2 sont indépendantes de h .

Chapitre 2

Formulation en champ magnétique

Dans ce chapitre, on va établir une formulation mixte sur \mathbf{R}^3 tout entier où une inconnue est le champ magnétique. On va étudier en détail cette formulation en utilisant la théorie de Brezzi-Babuska.

Puis, on transforme cette formulation en une formulation mixte hybride sur $\bar{\Omega}$ en utilisant une méthode intégrale. Dans cette approche, on utilise les équations de Calderon, [15]. On montrera que cette formulation mixte hybride est bien posée.

2.1 Formulation sur \mathbf{R}^3

Le résultat suivant connu comme le lemme de Poincaré global va nous servir dans la suite ; on présente ici une nouvelle démonstration de ce résultat.

Lemme 2.1.1 *Soit $u \in H(\operatorname{div}^0; \mathbf{R}^3)$. Il existe un potentiel vecteur unique v dans $(H^1(\mathbf{R}^3))^3$ tel que*

$$\operatorname{rot} v = u,$$

$$\operatorname{div} v = 0.$$

Preuve. Soit $u \in H(\operatorname{div}^0; \mathbf{R}^3)$ et $\varphi \in (W^1(\mathbf{R}^3))^3$ la solution du problème variationnel

$$(\operatorname{rot} \varphi, \operatorname{rot} \psi)_{(L^2(\mathbf{R}^3))^3} + (\operatorname{div} \varphi, \operatorname{div} \psi)_{L^2(\mathbf{R}^3)} = (u, \psi)_{(L^2(\mathbf{R}^3))^3}, \quad \forall \psi \in (W^1(\mathbf{R}^3))^3.$$

Alors φ satisfait en particulier :

$$-\Delta \varphi = u,$$

au sens des distributions et ceci implique :

$$\Delta(\operatorname{div} \varphi) = 0.$$

Comme $\operatorname{div} \varphi$ est dans $L^2(\mathbf{R}^3)$, on voit que $\operatorname{div} \varphi$ est une fonction harmonique donc constante, d'où $\operatorname{div} \varphi = 0$ dans \mathbf{R}^3 . On définit $v = \operatorname{rot} \varphi$. Il est clair que $v \in H(\operatorname{rot}; \mathbf{R}^3)$ et de plus $\operatorname{div} v = 0$. Ainsi $v \in H(\operatorname{rot}; \mathbf{R}^3) \cap H(\operatorname{div}^0; \mathbf{R}^3)$ et par suite elle est dans $(H^1(\mathbf{R}^3))^3$. \square

Après avoir caractérisé les fonctions à divergence nulle, on va présenter le problème de la magnétostatique dont l'inconnue sera le champ de réaction.

Dans la suite, on suppose que la perméabilité μ vérifie

$$0 < \mu_0 \leq \mu(x) \leq m,$$

où m est un nombre réel, on définit le champ de réaction $h^r = h - h^s$ où h^s est le champ source qui est donné par la loi de Biot et Savart en tout point de \mathbf{R}^3 :

$$h^s(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\operatorname{supp}(j)} \frac{j(y) \wedge (x - y)}{\|x - y\|^3} dy.$$

Le problème de la magnétostatique noté (A) est le suivant :

Problème (A) :

Pour un $h^s \in (H^1(\mathbf{R}^3))^3$, trouver un $h^r \in H(\operatorname{rot}, \mathbf{R}^3)$ tel que :

$$\operatorname{div} \mu(h^r + h^s) = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^3, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} h^r = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^3. \quad (2.2)$$

On introduit l'espace fonctionnel :

$$H_0 = \{u \in H(\operatorname{rot}, \mathbf{R}^3); \operatorname{rot} u = 0 \text{ dans } \Omega'\}$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, u')_{H_0} = (u, u')_{(L^2(\mathbf{R}^3))^3} + (\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} u')_{(L^2(\Omega))^3}$$

et la norme associée $\|u\|_{H_0}$. En outre, on considère le sous espace fermé de $(L^2(\Omega))^3$

$$H_0(\operatorname{div}^0, \Omega) = \{u \in H(\operatorname{div}^0, \Omega); u \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

muni de la norme $\|u\|_{(L^2(\Omega))^3}$.

On va maintenant établir une formulation mixte du problème (A).

D'après l'équation (2.1) et le lemme 2.1.1, il existe un potentiel vecteur $v \in (H^1(\mathbf{R}^3))^3$ tel que :

$$\mu(h^r + h^s) = \operatorname{rot} v \text{ dans } \mathbf{R}^3,$$

et

$$\operatorname{div} v = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^3.$$

D'autre part, en écrivant faiblement la seconde équation du problème (A) :

$$(\operatorname{rot} h^r, v')_{(L^2(\mathbf{R}^3))^3} = (\operatorname{rot} h^r, v')_{(L^2(\Omega))^3} = 0 \quad \forall v' \in H(\operatorname{div}^0, \mathbf{R}^3),$$

on obtient la formulation variationnelle :

Problème (B) :

Pour un $h^s \in (H^1(\mathbf{R}^3))^3$, trouver $(h^r, v) \in H_0 \times H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$ tel que :

$$\begin{aligned} (\mu h^r, h')_{L^2(\mathbf{R}^3)^3} - (\operatorname{rot} h', v)_{(L^2(\Omega))^3} &= -(\mu h^s, h')_{(L^2(\mathbf{R}^3))^3} & \forall h' \in H_0 \\ - (\operatorname{rot} h^r, v')_{(L^2(\Omega))^3} &= 0 & \forall v' \in H_0(\operatorname{div}^0, \Omega) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dans la partie suivante, on va étudier le problème que l'on vient d'établir.

2.2 Etude du problème (B)

On définit la forme bilinéaire continue sur $H_0 \times H_0$:

$$a(u, u') = (\mu u, u')_{(L^2(\mathbf{R}^3))^3};$$

la forme bilinéaire continue sur $H_0 \times H_0(\operatorname{div}^0; \Omega)$

$$b(u, v) = -(\operatorname{rot} u, v)_{(L^2(\Omega))^3}$$

et la forme linéaire continue sur H_0 :

$$f(v) = -(\mu h^s, v)_{(L^2(\mathbf{R}^3))^3}.$$

Soit $N(b)$ le noyau de la forme bilinéaire continue b

$$N(b) = \{u \in H_0; \operatorname{rot} u = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^3\}$$

Le problème (B) s'énonce comme suit :

soit $h^s \in (H^1(\mathbf{R}^3))^3$, trouver $(h^r, v) \in H_0 \times H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$ tel que :

$$\begin{aligned} a(h^r, h') + b(h', v) &= f(h') & \forall h' \in H_0, \\ b(h^r, v') &= 0 & \forall v' \in H_0(\operatorname{div}^0, \Omega). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Il est clair que l'on a le lemme suivant.

Lemme 2.2.1 *La forme bilinéaire $a(,)$ définie précédemment est coercive sur $N(b)$.*

Maintenant, on démontre la condition inf-sup pour montrer que le problème (B) est bien posé. On introduit l'espace [20] [22] :

$$W(\Omega) = \{u \in (H^1(\Omega))^3; \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega; u \times n = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

muni de la norme $(H^1(\Omega))^3$ On a le résultat. [20] [22].

Lemme 2.2.2 $\forall u \in W(\Omega)$, on a $\|u\|_{W(\Omega)} = \|\operatorname{rot} u\|_{(L^2(\Omega))^3}$.

En utilisant le lemme 2.1.1 et le théorème de Lax-Milgram, on peut établir le résultat suivant qui est le résultat clé pour établir la condition inf-sup.

Lemme 2.2.3 *Pour tout $v \in H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$, il existe une solution unique $u \in (H^1(\Omega))^3$ du problème :*

$$\operatorname{rot} u = v \text{ dans } \Omega,$$

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$u \times n = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

En outre, il existe une constante C positive tel que :

$$\|u\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C \|u\|_{W(\Omega)}.$$

Preuve. Soit $v \in H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$, et $u \in W(\Omega)$ la solution du problème variationnel :

$$(\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} u')_{(L^2(\Omega))^3} = (v, \operatorname{rot} u')_{(L^2(\Omega))^3} \quad \forall u' \in W(\Omega).$$

En utilisant le lemme 2.1.1 et le théorème de Lax-Milgram on démontre que le problème a une solution unique et on a l'inégalité. \square

On va établir maintenant la condition inf-sup.

Lemme 2.2.4 *Soit $b(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire introduite précédemment. Il existe une constante positive telle que*

$$\sup_{h \in H_0 \setminus \{0\}} \frac{b(h, v)}{\|h\|_{H_0}} \geq C \|v\|_{(L^2(\Omega))^3} \quad \forall v \in H_0(\operatorname{div}^0, \Omega).$$

Preuve. Soit $v \in H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$ et soit u la solution du problème :

$$\operatorname{rot} u = v \text{ dans } \Omega,$$

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$u \times n = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Par le lemme 2.2.3, une telle solution existe. On définit, alors, $\tilde{u} \in H_0$ par :

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= u \text{ dans } \Omega, \\ \tilde{u} &= 0 \text{ dans } \Omega', \\ \tilde{u} \times n &= 0 \text{ sur } \Gamma.\end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$b(\tilde{u}, v) = (\text{rot } \tilde{u}, v)_{(L^2(\Omega))^3} = \|\text{rot } \tilde{u}\|_{(L^2(\Omega))^3} \|v\|_{(L^2(\Omega))^3} = \|\tilde{u}\|_{W(\Omega)} \|v\|_{(L^2(\Omega))^3}.$$

En utilisant le lemme 2.2.2, on a

$$\|\tilde{u}\|_{W(\Omega)} \geq C \|\tilde{u}\|_{H_0}.$$

Donc, on en déduit

$$b(\tilde{u}, v) \geq C \|\tilde{u}\|_{H_0} \|v\|_{(L^2(\Omega))^3}.$$

□

Nous avons le résultat :

Théorème 2.2.1 *Le problème (B) a une solution unique (h^r, v) dans $H_0 \times H_0(\text{div}^0, \Omega)$.*

Preuve. application directe du théorème 1.5.1

□

2.3 Formulation sur $\overline{\Omega}$

Dans cette section, on va utiliser les équations de Calderon, afin d'avoir une formulation variationnelle sur $\overline{\Omega}$. On définit l'espace produit dont on aura besoin :

$$Z = H(\text{rot}; \Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$$

muni de la norme

$$\|(h, \varphi, \lambda)\|_Z = (\|h\|_{H(\text{rot}; \Omega)}^2 + \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\lambda\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2)^{1/2}.$$

On va aussi introduire l'espace fonctionnel :

$$\mathcal{H} = \{u \in H(\text{rot}; \mathbf{R}^3) \cap H(\text{div}; \mathbf{R}^3), \text{rot } u = j \text{ dans } \mathbf{R}^3, \text{div } u = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^3\}.$$

On va maintenant établir une formulation du problème (A) en couplant une méthode mixte avec une méthode intégrale.

Comme $\text{div } \mu(h^r + h^s) = 0$ dans \mathbf{R}^3 , on déduit du lemme 2.1.1 qu'il existe $v \in H^1(\mathbf{R}^3)$

tel que $\mu(h^r + h^s) = \text{rot } v$ dans \mathbf{R}^3 . En multipliant cette équation par une fonction test h' et en intégrant sur \mathbf{R}^3 , on a :

$$\int_{\mathbf{R}^3} \mu h^r \cdot h' - \int_{\mathbf{R}^3} \text{rot } v \cdot h' = - \int_{\mathbf{R}^3} \mu h^s \cdot h'.$$

A l'aide de la formule de Stokes et si on suppose que la fonction test h' satisfait les mêmes conditions dans Ω' que h^r , on obtient :

$$\int_{\mathbf{R}^3} \mu h^r \cdot h' - \int_{\Omega} \text{rot } h' \cdot v = - \int_{\mathbf{R}^3} \mu h^s \cdot h'.$$

Le résultat suivant va nous permettre de représenter h comme potentiel scalaire dans Ω' .

Lemme 2.3.1 *Soit $u \in (L^2(\Omega'))^3$ tel que $\text{rot } u = 0$ dans Ω' . Alors, il existe une fonction unique $p \in W^1(\Omega')$ à une constante près telle que $u = \text{grad } p$ dans Ω' .*

Preuve. voir [10]. □

Il découle du dernier lemme qu'il existe $\psi \in W^1(\Omega')$ telle que $h^r = \text{grad } \psi$ dans Ω' . On remarque que h^r a aussi une divergence nulle dans Ω' donc ψ satisfait :

$$\Delta \psi = 0 \text{ dans } \Omega'.$$

Posons $h' = \text{grad } \psi'$ dans Ω' avec

$$\Delta \psi' = 0 \text{ dans } \Omega',$$

ceci donne

$$\int_{\Omega'} \mu h^r \cdot h' = \int_{\Omega'} \mu \text{grad } \psi \text{grad } \psi' = \mu_0 \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n} \psi'.$$

Alors le couplage consiste à utiliser les équations de Calderon pour les données de Cauchy $(\psi|_{\Gamma}, \lambda)$ avec $\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial n}$. On obtient la formulation faible mixte dans laquelle la deuxième équation correspond à l'équation (2.2) du problème initial :

Problème (C) :

Etant donné un $h^s \in \mathcal{H}$, trouver $((h^r, \varphi, \lambda), v) \in Z \times H_0(\text{div}^0; \Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} a((h^r, \varphi, \lambda), (h', \varphi', \lambda')) + b(h', v) = f_1(h', \varphi', \lambda') & \forall (h', \varphi', \lambda') \in Z, \\ b(h^r, v') = 0 & \forall v' \in H_0(\text{div}^0; \Omega). \end{cases} \quad (2.5)$$

Sur $Z \times Z$, la forme bilinéaire continue a est définie par :

$$a((h, \varphi, \lambda), (h', \varphi', \lambda')) = (\mu h, h')_{(L^2(\Omega))^3} + \mu_0 \langle V \lambda, \lambda' \rangle$$

$$-\frac{\mu_0}{2} \langle \lambda', \varphi \rangle - \mu_0 \langle \lambda', K\varphi \rangle$$

$$+\frac{\mu_0}{2} \langle \lambda, \varphi' \rangle + \mu_0 \langle K'\lambda, \varphi' \rangle + \mu_0 \langle W\varphi, \varphi' \rangle .$$

Sur $Z \times H_0(\text{div}^0; \Omega)$, la forme bilinéaire continue b est définie par :

$$b(h, v) = -(\text{rot } h, v)_{(L^2(\Omega))^3},$$

sur Z , f_1 est une forme linéaire continue définie par

$$f_1(h, \varphi, \lambda) = \mu_0 \langle h^s \cdot n, \varphi \rangle - (\mu h^s, h)_{(L^2(\Omega))^3}$$

On a le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *Soit h^r la solution des équations (2.1) – (2.2). Alors il existe un potentiel scalaire φ tel que, $((h^r_\Omega, \varphi, \lambda), v)$ avec $\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial n}$ où ψ vérifie :*

$$\Delta \psi = 0 \text{ dans } \Omega',$$

$$\psi = \varphi \text{ sur } \Gamma,$$

est une solution du problème (C).

Réciproquement, on suppose que le problème (C) a une solution $((h^r, \varphi, \lambda), v)$. Alors la variable qui vaut h^r dans Ω et $\text{grad } \psi$ dans Ω' où ψ est donnée par la formule de représentation (1.6) est la solution des équations (2.1) – (2.2).

Maintenant, on va montrer que le problème (C) est bien posé avec la théorie de Basbuska Brezzi.

2.4 Etude du problème (C)

Soit $N(b)$ le noyau de la forme bilinéaire b :

$$N(b) = \{(h, \varphi, \lambda) \in Z; b((h, \varphi, \lambda), v) = 0 \quad \forall v \in H_0(\text{div}^0; \Omega)\}$$

$$= \{(h, \varphi, \lambda) \in Z; \text{rot } h = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

Tout d'abord, au sujet de la coercivité de la forme bilinéaire a , nous avons :

Lemme 2.4.1 *Soit $a(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire précédemment définie. Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\forall (h, \varphi, \lambda) \in N(b), \quad a((h, \varphi, \lambda), (h, \varphi, \lambda)) \geq C \|(h, \varphi, \lambda)\|_Z^2 .$$

Preuve. On a

$$\forall (h, \varphi, \lambda) \in Z, \quad a((h, \varphi, \lambda), (h, \varphi, \lambda)) = (\mu h, h)_{(L^2(\Omega))^3 + \mu_0} + V\lambda, \lambda + \mu_0 \langle W\varphi, \varphi \rangle;$$

grâce au lemme 1.4.1, nous avons

$$a((h, \varphi, \lambda), (h, \varphi, \lambda)) \geq \|\mu h\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \alpha \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \beta \|\lambda\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

Alors, on a

$$a((h, \varphi, \lambda), (h, \varphi, \lambda)) \geq C \|(h, \varphi, \lambda)\|_Z^2 \text{ avec } C > 0.$$

□

D'autre part, on donne un résultat concernant la condition inf-sup qui est la deuxième condition nécessaire pour que le problème soit bien posé.

Lemme 2.4.2 *Soit $b(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire définie précédemment sur $Z \times H_0(\text{div}^0; \Omega)$. Alors, il existe une constante positive β telle que :*

$$\sup_{(h, \varphi, \lambda) \in Z \setminus \{0\}} \frac{b((h, \varphi, \lambda), v)}{\|(h, \varphi, \lambda)\|_Z} \geq \beta \|v\|_{H_0(\text{div}^0; \Omega)}, \quad \forall v \in H_0(\text{div}^0; \Omega).$$

Preuve. Soit v dans $H_0(\text{div}^0; \Omega)$. On considère la fonction \tilde{h} dans $W(\Omega)$ telle que :

$$\begin{aligned} \text{rot } \tilde{h} &= v \text{ dans } \Omega, \\ \text{div } \tilde{h} &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \tilde{h} \times n &= 0 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

On sait qu'une telle fonction existe d'après le lemme 2.2.3. Alors, on a

$$b((\tilde{h}, 0, 0), v) = \|\tilde{h}\|_{W(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

D'après le lemme 2.2.3, on en déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$b((\tilde{h}, 0, 0), v) \geq C \|(\tilde{h}, 0, 0)\|_Z \|v\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

□

Alors, on a le résultat suivant.

Théorème 2.4.1 *Le problème (C) a une solution unique $((h^r, \varphi, \lambda), v)$ dans $Z \times H_0(\text{div}^0; \Omega)$.*

Chapitre 3

Formulation en induction magnétique

Dans cette section, on va établir une première formulation mixte de la magnétostatique dans \mathbf{R}^3 où cette fois-ci l'une des inconnues est l'induction magnétique.

On reprend l'approche décrite dans le chapitre précédent pour obtenir une formulation mixte sur $\bar{\Omega}$. L'opérateur de Neumann-Dirichlet permet de réaliser le couplage entre la méthode d'éléments finis mixtes et la méthode intégrale.

3.1 Formulation sur \mathbf{R}^3

On réécrit le problème de la magnétostatique sous la forme :

$$\operatorname{rot} \nu b = j \text{ dans } \mathbf{R}^3,$$

$$\operatorname{div} b = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^3,$$

où $\nu = \frac{1}{\mu}$ est l'inverse de la perméabilité du milieu.

On va maintenant proposer une première formulation du problème précédent.

Comme $\operatorname{rot} \nu b = \operatorname{rot} h^s$ dans \mathbf{R}^3 , on déduit du lemme de Poincaré global, [10], l'existence de $p \in W^1(\mathbf{R}^3)$ telle que $\nu b = \operatorname{grad} p + h^s$ dans \mathbf{R}^3 . On multiplie cette équation par b' et on intègre sur \mathbf{R}^3 . En utilisant la formule de Stokes et comme $\operatorname{div} b' = 0$ dans Ω' on obtient :

$$\int_{\mathbf{R}^3} \nu b \cdot b' - \int_{\Omega} \operatorname{div} b' p = + \int_{\mathbf{R}^3} h^s \cdot b'.$$

On définit l'espace fonctionnel :

$$B_0 = \{u \in H(\operatorname{div}; \mathbf{R}^3); \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega'\}.$$

En utilisant un multiplicateur de Lagrange pour tenir compte de la condition $\operatorname{div} b = 0$, on obtient la formulation mixte :

Problème (D)

soit $h^s \in (H^1(\mathbf{R}^3))^3$, trouver $(b, p) \in B_0 \times L_0^2(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} \tilde{a}(b, b') + \tilde{b}(b', p) = f(b') & \forall b' \in B_0, \\ \tilde{b}(b, p') = 0 & \forall p' \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\tilde{a}(b, b') = (\nu b, b')$, $\tilde{b}(b, p') = (\operatorname{div} b, p')$ et $f(b') = (h^s, b')$. $L_0^2(\Omega)$ est le sous espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ de moyenne nulle.

Maintenant, on va étudier le problème (D) et montrer qu'il a une unique solution dans l'espace $B_0 \times L_0^2(\Omega)$. On établit le premier résultat suivant.

Lemme 3.1.1 *La forme bilinéaire $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ est coercive sur le noyau de \tilde{b} .*

Avant d'établir la condition inf-sup on va donner deux résultats.

Lemme 3.1.2 *Supposons que Ω est borné, lipschitzien continu et simplement connexe, et son bord $\Gamma \in C^{1,1}$.*

$$\text{On a } \forall b \in H_0(\operatorname{div}, \Omega) \cap H(\operatorname{rot}, \Omega),$$

$$\|b\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C(\|\operatorname{div} b\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{rot} b\|_{(L^2(\Omega))^3}).$$

Preuve. Voir [22]. □

Lemme 3.1.3 *Avec les mêmes hypothèses que le lemme précédent nous avons :*

$$\forall b \in H_0(\operatorname{div}, \Omega) \cap H(\operatorname{rot}^0, \Omega)$$

$$\|b\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C\|\operatorname{div} b\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\|b\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \leq C\|\operatorname{div} b\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ce lemme se déduit immédiatement du lemme précédent. On peut maintenant établir le résultat suivant.

Lemme 3.1.4 *Il existe une constante $\beta > 0$ telle que :*

$$\sup_{b \in B_0 \setminus \{0\}} \frac{(\operatorname{div} b, p)_{L^2(\Omega)}}{\|b\|_{B_0}} \geq \beta \|p\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall p \in L_0^2(\Omega).$$

Preuve. Soit $p \in L_0^2(\Omega)$ et ϕ la solution du problème de Neumann :

$$\begin{cases} \Delta\phi &= p \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= 0 \text{ dans } \Gamma. \end{cases} \quad (3.2)$$

Alors on a $\phi \in H^1(\Omega)$. On pose maintenant $b_0 = \text{grad}\phi$ sur Ω et 0 dans Ω' . On peut remarquer que $b_0 \cdot n = 0$ et que $b_0 \in B_0$. On a alors :

$$\tilde{b}(b_0, p) = \|p\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ainsi, il existe une constante $\beta > 0$ telle que :

$$\tilde{b}(b_0, p) \geq \beta \|p\|_{L^2(\Omega)} \|b_0\|_{B_0}.$$

On a le résultat voulu. □

Théorème 3.1.1 *Le problème (D) a une solution unique dans $B_0 \times L_0^2(\Omega)$.*

Preuve. On applique le théorème 1.5.1. □

Dans la prochaine section, nous voulons établir une nouvelle formulation mixte qui porte seulement sur $\overline{\Omega}$ en utilisant une méthode intégrale.

3.2 Formulation sur $\overline{\Omega}$

Cette fois-ci, la méthode intégrale utilise l'opérateur de Neumann Dirichlet qui est un opérateur symétrique que l'on notera \mathcal{R} . On va maintenant le définir et donner certaines de ses propriétés.

Soit g une fonction de $H^{-1/2}(\Gamma)$, l'opérateur de Neumann-Dirichlet associé à g la trace de la fonction ψ sur Γ où ψ est la solution du problème extérieur :

$$\psi \in W^1(\Omega'), \quad (3.3)$$

$$\Delta\psi = 0 \text{ dans } \Omega', \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = g \text{ sur } \Gamma. \quad (3.5)$$

En utilisant une approche variationnelle, on montre facilement que la solution ψ du problème précédent existe. D'autre part, on sait que cet opérateur est une isométrie de $H_*^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

On va maintenant réaliser le couplage. On écrit $b = b^r + b^s$ où $b^s = \mu_0 h^s$, h^s étant le champ source qui est dans l'espace \mathcal{H} . De plus, on sait que b^r a un rotationnel et une

divergence nuls dans Ω' . D'après le lemme 2.3.1, il existe ψ telle que $b^r = \mu_0 \text{grad} \psi$ dans Ω' avec

$$\Delta \psi = 0 \text{ dans } \Omega'.$$

Ecrivons maintenant que $b' = \mu_0 \text{grad} \psi'$ dans Ω' avec

$$\Delta \psi' = 0 \text{ dans } \Omega'.$$

Ceci donne

$$\int_{\Omega'} \nu b^r \cdot b' = \nu_0 \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial \psi'}{\partial n} = \nu_0 \langle \mathcal{R} \gamma_{\tau} b^r, \gamma_{\tau} b' \rangle.$$

On obtient la formulation variationnelle suivante :

Problème (E) :

Soit $b^s \in \mathcal{H}$, trouver $(b^r; p) \in H(\text{div}; \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tel que :

$\forall b' \in H(\text{div}; \Omega)$ et $\forall p' \in L_0^2(\Omega)$

$$\begin{cases} (\nu b^r, b')_{(L^2(\Omega))^3} + \nu_0 \langle \mathcal{R} \gamma_{\tau} b^r, \gamma_{\tau} b' \rangle + (\text{div } b', p)_{L^2(\Omega)} = ((\nu_0 - \nu) b^s, b')_{(L^2(\Omega))^3}, \\ (\text{div } b^r, p')_{L^2(\Omega)} = -(\text{div } b^s, p')_{L^2(\Omega)} \end{cases} \quad (3.6)$$

couplé avec le problème extérieur :

$$\psi \in W^1(\Omega'), \quad (3.7)$$

$$\Delta \psi = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega'), \quad (3.8)$$

$$\psi = \nu_0 \mathcal{R} \gamma_{\tau} b^r \text{ sur } \Gamma. \quad (3.9)$$

Alors, on a directement le théorème d'équivalence suivant :

Théorème 3.2.1 *Si (b, p) est solution du problème (D) alors $(b_{|\Omega}^r, p)$ est la solution du problème (E). Réciproquement, si $(b_{|\Omega}^r, p)$ est la solution du problème (E) alors (b, p) où b est définie par :*

$$b = b_{|\Omega}^r + b_{|\Omega}^s \text{ dans } \Omega,$$

$$b = \mu_0 \text{grad } \psi + b_{|\Omega'}^s \text{ dans } \Omega'$$

et ψ solution des équations (3.5)-(3.7) est solution du problème (D).

Maintenant, on va montrer que le problème (E) a une unique solution avec la théorie de Babuska-Brezzi.

3.3 Etude du problème (E)

Réécrivons le problème (E) comme suit : pour $b^s \in \mathcal{H}$, trouver $(b^r, p) \in H(\text{div}; \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} a_1(b^r, b') + b_1(b', p) &= g_1(b') \quad \forall b' \in H(\text{div}; \Omega), \\ b_1(b^r, p') &= g_2(p') \quad \forall p' \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (3.10)$$

Dans $H(\text{div}; \Omega) \times H(\text{div}; \Omega)$, la forme bilinéaire a_1 est définie par :

$$a_1(b, b') = (\nu b, b')_{0, \Omega} + \nu_0 \langle \mathcal{R}b.n, b'.n \rangle,$$

dans $H(\text{div}; \Omega) \times L_0^2(\Omega)$, la forme bilinéaire b_1 est définie par :

$$b_1(b, p) = (\text{div } b, p)_{0, \Omega}$$

et les formes linéaires et continues g_1 et g_2 sont données par :

$$g_1(b) = ((\nu_0 - \nu)b^s, b)_{0, \Omega} \text{ dans } H(\text{div}; \Omega),$$

et

$$g_2(p) = -(\text{div } b^s, p)_{0, \Omega} \text{ dans } L_0^2(\Omega).$$

Nous déduisons des propriétés de l'opérateur intégral \mathcal{R} que la forme a_1 est continue sur $H(\text{div}; \Omega) \times H(\text{div}; \Omega)$. Soit $N(b_1)$ le noyau de la forme b_1 c'est à dire

$$N(b_1) = \{b \in H(\text{div}; \Omega), \text{div } b = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

Nous étudions maintenant l'existence et l'unicité de la solution du problème (E). Tout d'abord, on a le lemme suivant.

Lemme 3.3.1 *Soit $a_1(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire précédente. Il existe une constante positive α telle que :*

$$\forall b \in N(b_1), \quad a_1(b, b) \geq \alpha \|b\|_{H(\text{div}; \Omega)}^2.$$

Preuve. On déduit du lemme 1.4.1 :

$$\begin{aligned} a_1(b, b) &= \|\nu b\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \nu_0 \langle \mathcal{R} \gamma_\tau b, \gamma_\tau b \rangle, \\ &\geq c \|b\|_{H(\text{div}; \Omega)}^2, \quad \forall b \in N(b_1). \end{aligned}$$

□

Maintenant, on établit le résultat suivant.

Lemme 3.3.2 Soit $b_1(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire définie précédemment sur $H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$. Alors, il existe une constante positive β telle que :

$$\sup_{b \in H(\text{div}, \Omega) \setminus \{0\}} \frac{b_1(b, p)}{\|b\|_{H(\text{div}; \Omega)}} \geq \beta \|p\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall p \in L_0^2(\Omega).$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle pour établir la condition inf-sup du problème (D). \square

On a ainsi :

Théorème 3.3.1 Le problème (E) a une unique solution $(b, p) \in H(\text{div}; \Omega) \times L_0^2(\Omega)$.

Preuve. On applique le théorème 1.5.1.

Chapitre 4

Deuxième formulation en induction magnétique

Dans la partie précédente, on a proposé une formulation mixte où l'inconnue est l'induction magnétique mais la méthode intégrale utilise un opérateur intégral dont la discrétisation est compliquée car elle doit tenir compte des équations du problème extérieur. Ici on va présenter une autre approche intégrale dont la matrice du schéma numérique s'obtient directement par une méthode de Galerkin. La démarche de cette méthode s'inspire des travaux qui se trouvent dans [26]. On va poser $b = \text{rot } u$ dans le domaine extérieur et on va calculer les traces tangentielles de u et de $\text{rot } u$ sur Γ ; ces traces seront exprimées en fonction d'opérateurs intégraux et elle vont nous permettre de réaliser le couplage.

4.1 Problème extérieur

Pour calculer les traces, on doit d'abord donner le problème extérieur. En écrivant $b = \text{rot } u$ dans le complémentaire de Ω , le potentiel vecteur u est solution du problème extérieur :

pour $p \in H^{-1/2}(\text{rot}_\Gamma; \Gamma)$, trouver $u \in (W^1(\Omega'))^3$ telle que :

$$\text{rot rot } u = 0 \text{ dans } \Omega', \quad (4.1)$$

$$\text{div } u = 0 \text{ dans } \Omega', \quad (4.2)$$

$$(n \times u) \times n = p \text{ sur } \Gamma. \quad (4.3)$$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.1.1 *Il existe un unique potentiel vecteur $u \in (W^1(\Omega'))^3$ solution de (4.1)-(4.3).*

Preuve. Le résultat s'obtient en utilisant une approche variationnelle.

Dans la suite, comme l'inconnue principale du problème est l'induction magnétique b , on va supprimer la condition de gauge ce qui détermine u à un gradient près mais ne modifie pas b qui s'exprime en fonction de $\text{rot } u$.

4.2 Calcul des traces

On va ramener le problème (4.1) – (4.3) à un problème d'ordre un par le changement de variable $\text{rot } u = v$. Soit \tilde{u} le prolongement de u par 0 dans Ω , et soit par ailleurs \tilde{v} le prolongement de v par 0 dans Ω . Au sens des distributions, on a les égalités :

$$\begin{aligned}\text{rot } \tilde{u} &= \widetilde{\text{rot } u} - [n \times \tilde{u}] \delta_\Gamma, \\ \text{div } \tilde{u} &= \widetilde{\text{div } u} - [n \cdot \tilde{u}] \delta_\Gamma\end{aligned}$$

où δ_Γ est la distribution de Dirac de la surface Γ et $[\cdot]$ est le saut à travers la surface Γ . Nous avons alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} \text{rot } \tilde{u} - \tilde{v} = -[n \times u] \delta_\Gamma, \\ \text{rot } \tilde{v} = -[n \times v] \delta_\Gamma, \\ \text{div } \tilde{u} = -[n \cdot u] \delta_\Gamma. \end{cases}$$

Comme on a prolongé par 0, le saut d'une fonction est égal à sa trace extérieure. On obtient la représentation de u et v dans Ω' :

$$\begin{aligned}u &= - \int_\Gamma G(x, y) (n \times v)(y) + \nabla \int_\Gamma G(x, y) (n \cdot u)(y) \\ &\quad - \text{rot} \int_\Gamma G(x, y) (n \times u)(y),\end{aligned}$$

$$v = \nabla \int_\Gamma G(x, y) (n \cdot v)(y) - \text{rot} \int_\Gamma G(x, y) (n \times v)(y).$$

Grâce à l'identité

$$\text{rot rot } \tilde{u} = -(n \times v) \delta_\Gamma - \text{rot}((n \times u) \delta_\Gamma) = \text{grad div } \tilde{u} - \Delta \tilde{u}$$

on a

$$-\Delta \tilde{u} = (n \times v) \delta_\Gamma + \text{rot}((n \times u) \delta_\Gamma) + \text{grad}((n \cdot u) \delta_\Gamma).$$

Maintenant, on va utiliser les relations du saut des potentiels pour évaluer les composantes tangentielles définies sur la surface de séparation du domaine borné et son complémentaire. On a alors :

$$n \times (n \times u) = n \times \left(\frac{n \times u}{2} \right) - n \times \left(n \times \int_\Gamma G(x, y) (n \times \text{rot } u) \right)$$

$$\begin{aligned}
& -n \times \left(n \times \int_{\Gamma} \nabla G(x, y) \times (n \times u) \right) \\
& + n \times \left(n \times \nabla_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) (n \cdot u) \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
n \times \operatorname{rot} u &= \frac{n \times \operatorname{rot} u}{2} + n \times \nabla_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma}(n \times u) \\
& - n \times \int_{\Gamma} \nabla G(x, y) \times (n \times v).
\end{aligned}$$

Remarque 4.2.1 *Comme, on ne tient pas compte de la condition de gauge, on n'a pas besoin de calculer $n \cdot u|_{\Gamma}$.*

Récrivons ces formules de représentation en utilisant des opérateurs intégraux dont on va donner certaines propriétés nécessaires pour établir le cadre fonctionnel de la formulation que l'on va établir.

On pose $\lambda = n \times \operatorname{rot} u$ et $u_{\Gamma} = n \times u$. On définit l'espace fonctionnel

$$X = \{v \in H^{-1/2}(\operatorname{rot}_{\Gamma}; \Gamma) \text{ telle que } \operatorname{div}_{\Gamma} v = 0\}.$$

On peut remarquer que $\lambda \in X$ car

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \lambda = n \cdot \operatorname{rot}(\operatorname{rot} u)|_{\Gamma} = 0.$$

On a la proposition suivante :

Proposition 4.2.1 *Les opérateurs*

$$P_1 : H^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}; \Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}; \Gamma)$$

$$u_{\Gamma} \longrightarrow n \times \int_{\Gamma} \nabla G(x, y) \times u_{\Gamma}$$

$$P_2 : H^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}; \Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}; \Gamma)$$

$$\lambda \longrightarrow n \times \int_{\Gamma} G(x, y) \lambda$$

$$P_3 : H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}; \Gamma)$$

$$n \cdot u \longrightarrow n \times \operatorname{grad}_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) (n \cdot u)$$

sont continus.

Les traces peuvent alors être réécrites en utilisant les opérateurs intégraux sous la forme :

$$u_\Gamma = \frac{u_\Gamma}{2} - P_2(\lambda) - P_1(u_\Gamma) + P_3((n \cdot u)),$$

$$\lambda = \frac{\lambda}{2} + P_3(\operatorname{div}_\Gamma u_\Gamma) - P_1(\lambda).$$

4.3 Formulation sur $\bar{\Omega}$

Avec les mêmes techniques que dans les chapitres précédents, on va établir une formulation mixte sur $\bar{\Omega}$.

On va introduire l'espace fonctionnel Y défini par

$$Y = H^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma; \Gamma) / \gamma_t(\operatorname{grad} W^1(\Omega))$$

pour lequel la semi-norme $\|\operatorname{div}_\Gamma u\|_\Gamma$ est une norme, et l'espace Z' défini par

$$Z' = \{(b, u_\Gamma, \lambda) \in H(\operatorname{div}; \Omega) \times Y \times X; \text{ tel que } b \cdot n = \operatorname{rot}_\Gamma u_\Gamma + b^s \cdot n \text{ sur } \Gamma\}$$

muni de la norme naturelle :

$$\|(b, u_\Gamma, \lambda)\|_{Z'} = (\|b\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}^2 + \|u_\Gamma\|_Y^2 + \|\lambda\|_X^2)^{1/2}.$$

On écrit le champ total $b = b^s + b^r$ où b^r est l'induction de réaction dans Ω' . Nous avons $\operatorname{div} b^r = 0$; on peut alors exprimer b^r en fonction du potentiel vecteur u : $b^r = \operatorname{rot} u$ dans Ω' . Dans l'intégrale portant sur Ω' , on remplace b^r par $\operatorname{rot} u$ et b' par $\operatorname{rot} u'$ puis on intègre par parties. On remplace $n \times \operatorname{rot} u$ par sa valeur et on écrit faiblement l'expression de u_Γ . On obtient la formulation suivante :

Problème (F)

pour une fonction $p^s \in H^1(\Omega)$ donnée, trouver $((b, u_\Gamma, \lambda), p) \in Z' \times L_0^2(\Omega)$, tel que :

$$\begin{cases} \tilde{a}_1((b, u_\Gamma, \lambda), (b', u', \lambda')) + \tilde{b}_1((b', u', \lambda'), p) & = \tilde{f}_1((b', u', \lambda')) \\ \forall (b', u', \lambda') \in H(\operatorname{div}; \Omega) \times Y \times X, & \\ \tilde{b}_1((b, u_\Gamma, \lambda), p') & = 0 \\ & \forall p' \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (4.4)$$

avec la forme bilinéaire continue \tilde{a}_1 définie sur $Z' \times Z'$ par :

$$\tilde{a}_1((b, u_\Gamma, \lambda), (b', u'_\Gamma, \lambda')) = (\nu b, b')_{(L^2(\Omega))^3}$$

$$+ \nu_0 \int_\Gamma \int_\Gamma G(x, y) \operatorname{div}_\Gamma u_\Gamma(y) \cdot \operatorname{div}_\Gamma u'_\Gamma(x) +$$

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} u'_{\Gamma}(x) \cdot (\lambda(y) \times \nabla_x G(x, y)) +$$

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \lambda'(x) \cdot (u_{\Gamma}(y) \times \nabla_x G(x, y)) + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \lambda'(x) \cdot \lambda(y)$$

la forme bilinéaire \tilde{b}_1 continue sur $Z' \times L_0^2(\Omega)$ et qui vaut :

$$\tilde{b}_1((b, u_{\Gamma}, \lambda), p) = (\operatorname{div} b, p)_{L^2(\Omega)},$$

et enfin la forme linéaire continue sur Z' :

$$\tilde{f}_1((b, u_{\Gamma}, \lambda)) = \langle b' \cdot n, p^s \rangle - (\operatorname{div} b, p^s)_{L^2(\Omega)}.$$

On note comme d'habitude $\nu_0 = \frac{1}{\mu_0}$ et dans la suite la variable $p + p^s$ est notée simplement par p quand il n'y aura pas d'ambiguïté.

Cette formulation variationnelle est couplée avec le problème extérieur : trouver $u \in (W^1(\Omega'))^3$ telle que :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} u = 0 \text{ dans } \Omega', \\ (n \times u) \times n = u_s \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.5)$$

auquel il faut rajouter la condition de gauge $\operatorname{div} u = 0$ pour avoir l'unicité de u .

Le problème (F) couplé avec le problème extérieur est équivalent au problème de la magnétostatique. C'est le résultat énoncé dans la proposition suivante :

Proposition 4.3.1 *Soit b la solution du problème de la magnétostatique dans Ω et si on écrit $b^r = \operatorname{rot} u$ dans Ω' , alors avec les notations utilisées $((b_{/\Omega}, u_{\Gamma}, \lambda), p)$ est solution du problème (F).*

Réciproquement, on suppose que le problème (F) a une solution $((b, u_{\Gamma}, \lambda), p) \in Z' \times L_0^2(\Omega)$, alors la variable \tilde{b} définie par :

$$\tilde{b} = b \text{ dans } \Omega,$$

$$\tilde{b} = b^s + \operatorname{rot} u \text{ dans } \Omega',$$

avec u solution du problème extérieur, est solution du problème de la magnétostatique.

Preuve. Comme Ω' est simplement connexe, et $\operatorname{div} b^r = 0$ dans Ω' , il existe u telle que $b^r = \operatorname{rot} u$ dans Ω' . Notons par u_{Γ} la trace tangentielle de u et par $b_{/\Omega}$ la restriction de b à Ω . Alors, $((b_{/\Omega}, u_{\Gamma}, \lambda), p)$ est solution du problème (F).

Réciproquement, si $((b, u_{\Gamma}, \lambda), p)$ est solution de (F) et u la solution de (4.1) – (4.3), on définit une variable notée \tilde{b} dont la restriction à Ω est b et qui vaut $b^s + \operatorname{rot} u$ en dehors de Ω . Cette variable est dans $H(\operatorname{div}, \mathbf{R}^3)$ parce que les deux composantes

normales de $b_{/\Omega}^r$ et de $\text{rot } u$ coïncident grâce à la définition de Z' . Ainsi, nous avons par construction $\text{rot } \nu \tilde{b} = j$ et $\text{div } \tilde{b} = 0$ dans \mathbf{R}^3 . \square

Etudions cette formulation mixte en utilisant la théorie de Babuska-Brezzi. On définit $N(\tilde{b}_1)$ le noyau de la forme bilinéaire continue \tilde{b}_1 . Alors il est clair que :

$$N(\tilde{b}_1) = \{(b, u_\Gamma, \lambda) \in Z'; \text{div } b = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

On montre d'abord un résultat de coercivité.

Lemme 4.3.1 *La forme bilinéaire \tilde{a}_1 est coercive sur le noyau de \tilde{b}_1 .*

Preuve.

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1((b, u_\Gamma, \lambda), (b, u_\Gamma, \lambda)) &= (\nu b, b)_{(L^2(\Omega))^3} \\ &+ \nu_0 \int_\Gamma \int_\Gamma G(x, y) \text{div}_\Gamma u_\Gamma(y) \cdot \text{div}_\Gamma u_\Gamma(x) + \\ &\int_\Gamma \int_\Gamma u_\Gamma(x) \cdot (\lambda(y) \times \nabla_x G(x, y)) + \\ &\int_\Gamma \int_\Gamma \lambda(x) \cdot (u_\Gamma(y) \times \nabla_x G(x, y)) + \int_\Gamma \int_\Gamma G(x, y) \lambda(x) \cdot \lambda(y). \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\int_\Gamma \int_\Gamma u_\Gamma(x) \cdot (\lambda(y) \times \nabla_x G(x, y)) + \int_\Gamma \int_\Gamma \lambda(x) \cdot (u_\Gamma(y) \times \nabla_x G(x, y)) = 0.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1((b, u_\Gamma, \lambda), (b, u_\Gamma, \lambda)) &= (\nu b, b)_{(L^2(\Omega))^3} \\ &+ \nu_0 \int_\Gamma \int_\Gamma G(x, y) \text{div}_\Gamma u_\Gamma(y) \cdot \text{div}_\Gamma u_\Gamma(x) + \int_\Gamma \int_\Gamma G(x, y) \lambda(x) \cdot \lambda(y). \end{aligned}$$

Il s'en déduit la coercivité de \tilde{a}_1 sur le noyau de \tilde{b}_1 . \square

On a ainsi le résultat suivant :

Théorème 4.3.1 *Le problème (F) a une unique solution dans $Z' \times L_0^2(\Omega)$.*

Preuve. On sait aussi que \tilde{b}_1 vérifie la condition inf-sup. D'où le résultat en appliquant le théorème 1.5.1. \square

Chapitre 5

Etude de formulations discrètes

Afin de résoudre en dimension trois le problème de la magnétostatique, nous allons discrétiser les formulations (2.5) et (3.9) établies dans les chapitres précédents. Nous nous limiterons pour cela à des éléments finis tétraédriques, qui sont les plus fréquemment employés. On va présenter les éléments de Nédélec utiles pour la discrétisation du champ magnétique et les éléments de Raviart-Thomas utiles pour la discrétisation de l'induction magnétique car la méthode des éléments finis utilisée dans le couplage est conforme.

5.1 Rappel sur les éléments finis

Nous commençons par rappeler la définition d'un élément fini, [30], [31].

Definition 5.1.1 *Un élément fini est la donnée d'un triplet (K, P, Σ) où*

- K est une partie compacte connexe d'intérieur non vide de \mathbf{R}^3 , en général un triangle ou un tétraèdre ou un hexaèdre,
- P est un espace vectoriel de fonctions définies sur K ,
- Σ un ensemble de formes linéaires appelées degrés de liberté et qui agissent sur les fonctions de P .

Definition 5.1.2 *On dit qu'un élément fini est unisolvant si*

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^3$, il existe un unique $h \in P$ tel que

$$\sigma_i(h) = x_i \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall \sigma_i \in \Sigma.$$

Si l'élément fini est unisolvant, il existe un unique polynôme d'interpolation noté πh qui vérifie :

$$\sigma_i(\pi h) = \sigma_i(h), \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall \sigma_i \in \Sigma.$$

Le polynôme πh est l'élément de P qui coïncide avec h en tous les degrés de liberté.

On génère une triangulation \mathcal{T}_h de Ω en tétraèdres :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

de telle façon que :

- 1) chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$ est un tétraèdre non vide,
- 2) les intérieurs de deux tétraèdres distincts sont disjoints,
- 3) toute face d'un tétraèdre est soit la face d'un tétraèdre soit une partie de Γ . La frontière Γ est décomposée en triangles, traces des tétraèdres qui maillent Ω .

Definition 5.1.3 On dit qu'un élément fini est de classe $H(\text{div})$ si la composante normale de πh est continue à travers les faces internes des éléments.

Definition 5.1.4 On dit qu'un élément fini est de classe $H(\text{rot})$ si la composante tangentielle de πh est continue à travers les faces internes des éléments.

5.1.1 Élément fini de Raviart-Thomas

Definition 5.1.5 L'élément fini de Raviart-Thomas d'ordre un est défini par :

- K est un tétraèdre,
- $\mathbf{P} = (P_0)^3 \oplus xP_0$ avec $x = (x_1, x_2, x_3)$ et P_0 l'espace des polynômes constants,
- $\Sigma = \{ \int_f p \cdot n dx, \forall f \text{ face du tétraèdre } K \}$ avec n vecteur normale à la face f .

On a la propriété suivante pour caractériser les éléments de classe $H(\text{div})$.

Lemme 5.1.1 Une fonction $q \in L^2(\Omega)$ régulière dans chaque élément vérifiant pour tout couple (K_1, K_2) d'éléments adjacents :

$$q_{K_1} \cdot n_{K_1} + q_{K_2} \cdot n_{K_2} = 0 \text{ sur } \partial K_1 \cap \partial K_2$$

est dans $H(\text{div}; \Omega)$

Preuve. Il s'agit de vérifier que $\text{div } q$ est dans $L^2(\Omega)$.

Soit $v \in L^2(\Omega)$ vérifiant $v|_K = \text{div } q$ au sens des distributions.

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on doit montrer que

$$\int_{\Omega} v \varphi = - \int_{\Omega} q \nabla \varphi.$$

En employant la formule de Green dans chaque K on a :

$$\int_{\Omega} q \nabla \varphi = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q \nabla \varphi = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(- \int_K \text{div } q|_K \varphi + \int_{\partial K} q|_K \cdot n_K \right) = - \int_{\Omega} v \varphi$$

□

Les fonctions de base de l'élément fini de Raviart-Thomas vérifie le lemme 5.1.1 par construction.

5.1.2 Elément fini d'arête de Nédélec

On s'intéresse maintenant à une classe d'éléments finis d'ordre un définie par Nédélec.

Definition 5.1.6 *L'élément fini de Nédélec est défini par :*

- K est un tétraèdre,
- $\mathbf{P} = (P_0)^3 \times x + (P_0)^3$,
- $\Sigma = \{ \int_l p \cdot t \, dl, \forall l \text{ arête du tétraèdre } K \}$ avec t un vecteur tangent à l'arête l .

On a la propriété suivante pour caractériser les éléments de classe $H(\text{rot})$.

Lemme 5.1.2 *Une fonction $q \in L^2(\Omega)$ régulière dans chaque élément vérifiant pour tout couple (K_1, K_2) d'éléments adjacents :*

$$q_{K_1} \times n_{K_1} + q_{K_2} \times n_{K_2} = 0 \text{ sur } \partial K_1 \cap \partial K_2$$

est dans $H(\text{rot}; \Omega)$

Les fonctions de base de l'élément fini de Nédélec vérifie le lemme 5.1.2 par construction.

5.2 Espaces d'approximation

Soit \mathcal{T}_h^1 une famille de triangulations régulière de Ω avec des tétraèdres de diamètre h_K , ici l'indice $\mathbf{h} = \sup_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, mesure la finesse du maillage. Il existe alors une constante σ telle que le rapport $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$, où ρ_K désigne le diamètre de la plus grande boule inscrite dans K .

Une triangulation \mathcal{T}_h^2 de Γ est déduite de \mathcal{T}_h^1 .

On introduit l'espace d'approximation :

$$H_h = \{ h_h \in H(\text{rot}; \Omega); h_h|_K = \alpha + \beta \times x, \forall \alpha \in P_0^3, \beta \in P_0^3, \forall K \in \mathcal{T}_h^1; x \in \mathbf{R}^3 \}$$

et le sous espace :

$$H_h^0 = \{ h_h \in \mathcal{H}_h, h_h \times n_{|\Gamma} = 0 \}.$$

Ce sont des sous-espaces de dimension finie qui approchent $H(\text{rot}; \Omega)$. Pour approcher les éléments de $H(\text{div}; \Omega)$, on introduit l'espace :

$$\mathcal{B}_h = \{ b_h \in H(\text{div}; \Omega); b_h|_K = \alpha + \beta x, \forall K \in \mathcal{T}_h^1 \alpha \in P_0^3, \beta \in P_0 \};$$

on introduit aussi l'espace

$$V_h = \{ v_h \in \mathcal{B}_h, v_h \cdot n_{|\Gamma} = 0, \text{ et } \text{div } v_h = 0 \text{ dans } \Omega \}.$$

La variable φ est approchée par les polynômes de Lagrange P_1 . On la cherchera dans l'espace

$$Y_h = \{\varphi_h \in \mathbf{C}^0(\Omega); \varphi_h|_T \in P_1, \forall T \in \mathcal{T}_h^2\}.$$

On sait que $Y_h \subset H^{1/2}(\Gamma)$, [6]. Quand à la variable λ , elle sera constante sur chaque triangle ; elle est prise dans l'espace :

$$U_h = \{\lambda_h \in L^2(\Gamma); \lambda_h|_T \in P_0, \forall T \in \mathcal{T}_h^2\}.$$

L'espace $Z_h = H_h \times Y_h \times U_h$ sera une approximation de Z .

La discrétisation de h sur chaque tétraèdre est

$$h = \sum_{l=1}^6 h_l (\lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i)$$

avec λ_i la fonction barycentrique associée au sommet i et h_l la circulation le long de l'arête l qui est

$$h_l = \int_i^j h \cdot dl$$

Si $l = \{i, j\}$ est une arête sur Γ , alors la circulation du champ total est :

$$h_l = \varphi_j - \varphi_i + \int_i^j h^s \cdot dl.$$

Les degrés de libertés attachés à l'arête l sont maintenant φ_i et φ_j .

On note

1. n_{ai} est le nombre des arêtes internes,
2. n_{sg} nombre de sommet de Γ ,
3. n_{ag} nombre des arêtes sur Γ .

Nous pouvons écrire une approximation du champ magnétique sous la forme :

$$h = \sum_{l=1}^{n_{ai}} h_l U_l + \sum_{m=1}^{n_{sg}} \varphi_m W_m + \sum_{l=1}^{n_{ag}} h_l^s U_l$$

U_l (resp W_m) sont les fonctions de base associées à l'arête l (resp m). W_m est obtenue par combinaison linéaire des fonctions de base associées aux arêtes sur Γ dont un sommet est m . La discrétisation de v dans un tétraèdre est donnée par :

$$v = \sum_{f=1}^4 v_f W_f$$

avec $v_f = \int_f v \cdot n$ et W_f est la fonction de base associée à la face f . Plus précisément, si $f = \{l, m, n\}$ où l, m et n sont les sommets de la face f , la fonction de base associée à cette face est :

$$W_f = 2(\lambda_l \nabla \lambda_m \times \nabla \lambda_n + \lambda_m \nabla \lambda_n \times \nabla \lambda_l + \lambda_n \nabla \lambda_l \times \nabla \lambda_m).$$

Pour la variable φ , nous avons

$$\varphi = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \lambda_i$$

où φ_i est la variable nodale associée au sommet i d'un triangle du bord.

Dans le schéma discret correspondant à la formulation (C), les degrés de liberté sont alors :

1. La circulation du champ magnétique à l'intérieur de Ω ,
2. le potentiel de réaction φ sur les sommets de Γ ,
3. le flux du vecteur v sur les faces à l'intérieur de $\overline{\Omega}$,
4. la valeur des multiplicateurs de Lagrange λ sur les faces de Γ .

D'autre part, les variables h et φ doivent vérifier la condition de continuité à travers Γ :

Lemme 5.2.1

$$\forall h \in H_h, \varphi \in Y_h, \text{ on a } n \times h = n \times \text{grad}_{\Gamma} \varphi.$$

Preuve. Par linéarité, il suffit de faire la démonstration pour une face notée F et pour une fonction de base.

Soit $\varphi = \lambda_1$, la fonction barycentrique associée au sommet 1 de la face, (les sommets de la face sont notés 1, 2 et 3). On a $\text{grad} \varphi \times n = \nabla \lambda_1 \times n$. D'autre part, soit $h \in H_h$:

$$\begin{aligned} h \times n &= (\lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1) \left(\int_{a_{12}} \nabla \lambda_1 \cdot \tau ds \right) \times n \\ &\quad + (\lambda_2 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_2) \left(\int_{a_{23}} \nabla \lambda_1 \cdot \tau ds \right) \times n \\ &\quad + (\lambda_3 \nabla \lambda_1 - \lambda_1 \nabla \lambda_3) \left(\int_{a_{31}} \nabla \lambda_1 \cdot \tau ds \right) \times n \\ &= -(\lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1) \times n + (\lambda_3 \nabla \lambda_1 - \lambda_1 \nabla \lambda_3) \times n. \end{aligned}$$

Sur la face, on a les relations $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ et $\nabla \lambda_i \times n = \nabla_F \lambda_1 \times n$ où ∇_F est le gradient par rapport à un système de coordonnées orthonormé de la face F .

En éliminant λ_3 par $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ et $\nabla_F \lambda_3$ par $\nabla_F \lambda_3 = -\nabla_F \lambda_1 - \nabla_F \lambda_2$, on

arrive à $h \times n = \text{grad } \lambda_1 \times n$. Les composantes tangentielles sont donc les mêmes sur la face. L'élément fini que l'on a défini est donc conforme c'est à dire qu'il est de classe $H(\text{rot})$. \square

Nous allons maintenant détailler dans la suite l'approximation des formulations mixtes établies précédemment.

5.3 Approximation du problème (C)

Soit $h^s \in \mathcal{H}$, le problème C_h qui approche le problème (C) est : trouver $((h_h^r, \varphi_h, \lambda_h), v_h) \in Z_h \times V_h$ tel que

$$a((h_h^r, \varphi_h, \lambda_h), (h'_h, \varphi'_h, \lambda'_h)) + b((h'_h, \varphi'_h, \lambda'_h), v_h) = f_1(h'_h, \varphi'_h, \lambda'_h) \quad \forall (h'_h, \varphi'_h, \lambda'_h) \in Z_h \quad (5.1)$$

$$b((h_h^r, \varphi_h, \lambda_h), v'_h) = 0 \quad \forall v'_h \in V_h \quad (5.2)$$

On va maintenant étudier le problème C_h . On établit le premier résultat.

Lemme 5.3.1 *Il existe une constante positive α telle que*

$$a((h_h, \varphi_h, \lambda_h), (h_h, \varphi_h, \lambda_h)) \geq \alpha \|(h_h, \varphi_h, \lambda_h)\|_Z^2,$$

$$\forall (h_h, \varphi_h, \lambda_h) \in N(b) \cap Z_h$$

Preuve. La méthode des éléments finis étant conforme, la coercivité se déduit de celle du problème continue. \square

On a le résultat suivant pour la condition inf-sup.

Corollaire 5.3.1 *Il existe une constante β telle que*

$$\sup_{(h_h, \varphi_h, \lambda_h) \in Z_h \setminus \{0\}} \frac{b((h_h, \varphi_h, \lambda_h), v_h)}{\|(h_h, \varphi_h, \lambda_h)\|_Z} \geq \beta \|v_h\|_{L^2(\Omega)^3} \quad \forall v_h \in V_h.$$

Preuve. Soit $v_h \in V_h$, on considère \tilde{h}_h dans \mathcal{H}_h^0 avec

$$\text{rot } \tilde{h}_h = v_h.$$

Il est clair que $(\tilde{h}_h, 0, 0) \in Z_h$ et nous avons :

$$b((\tilde{h}_h, 0, 0), v_h) = \|\tilde{h}_h\|_{H(\text{rot}; \Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)^3}$$

Finalement, on déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$b((\tilde{h}_h, 0, 0), v_h) \geq C \|(\tilde{h}_h, 0, 0)\|_{Z_h} \|v_h\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

\square

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.3.1 *Le problème (C_h) a une solution unique $((h_h^r, \varphi_h, \lambda_h), v_h)$ dans $Z_h \times V_h$*

Comme la famille de triangulations est régulière, on peut obtenir une estimation de l'erreur.

Théorème 5.3.2 *Supposons que $((h^r, \varphi, \lambda), v)$ appartient à $H^2(\Omega) \times H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^1(\Omega)$, alors il existe une constante C indépendante de \mathbf{h} telle que*

$$\begin{aligned} & \|h^r - h_h^r\|_{H(\text{rot}; \Omega)} + \|\varphi - \varphi_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|v - v_h\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|\lambda - \lambda_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ & \leq C \mathbf{h} (\|h^r\|_{(H^2(\Omega))^3} + \|v\|_{(H^1(\Omega))^3} + \|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma)} + \|\lambda\|_{H^{1/2}(\Gamma)}) \end{aligned}$$

Preuve. voir [22], [30]. □

La forme matricielle du problème (C_h) est :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

La matrice A est définie par blocs par :

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 \\ A_2^t & A_3 & A_4 \\ 0 & A_5 & A_6 \end{pmatrix}$$

On remarque que la matrice n'est pas symétrique. Pour décrire la matrice A, on va introduire les notations suivantes :

1. nsi et nsg le nombre des sommets internes et sommets extérieurs,
2. nai et nag le nombre des arêtes internes et externes,
3. nfi et nfg le nombre des faces internes et externes.

Ici, 1_f désigne dans la suite la fonction indicatrice d'une face f .

La matrice A est donnée par blocs :

1. $A_1(nai \times nai)$ définie par :

$$(A_1)_{l,l'} = \sum_k \int_K \mu U_l \cdot U_{l'},$$

2. $A_2(nai \times nsg)$ définie par :

$$(A_2)_{l,j} = \sum_k \int_K \mu U_l \cdot W_j,$$

3. $A_3(nsg \times nsg)$ définie par :

$$(A_3)_{i,j} = \mu_0 \sum_T \int_T W(\lambda_j) \lambda_i,$$

4. $A_4(nsg \times nfg)$ définie par :

$$(A_4)_{i,f} = \mu_0 \sum_T \int_T \frac{1}{2} 1_f + K'(1_f) \lambda_i,$$

5. $A_5(nfg \times nsg)$ définie par :

$$(A_5)_{i,f} = -\mu_0 \sum_T \int_T \frac{1}{2} \lambda_i + K(\lambda_i) 1_f,$$

6. $A_6(nfg \times nfg)$ définie par :

$$(A_6)_{f',f} = \mu_0 \sum_T \int_T V(1_f) \cdot 1_{f'}.$$

5.3.1 Approximation du problème (E)

On va chercher une approximation pour la première inconnue b du problème (E) dans l'espace \mathcal{B}_h . L'espace de dimension finie P_h correspondant à l'inconnue p est formé des fonctions constantes par tétraèdre

$$P_h = \{p_h \in L^2(\Omega); p_{h|K} \in P_0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^1\}.$$

Il s'agit maintenant de calculer une approximation de l'opérateur de Neumann-Dirichlet. Notons \mathcal{R}_1 l'opérateur défini par :

$$\mathcal{R}_1 = \gamma_\tau^* \mathcal{R} \gamma_\tau \in \mathcal{L}(H(\text{div}; \Omega), H(\text{div}; \Omega)').$$

Pour approcher \mathcal{R}_1 , nous considérons les injections canoniques

$$i_h : \mathcal{B}_h \longrightarrow H(\text{div}; \Omega)$$

$$j_h : U_h \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

$$k_h : Y_h \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

et leurs adjoints i_h^* , j_h^* et k_h^* .

On définit l'opérateur discrétisé de \mathcal{R} par

$$\mathcal{R}_h = i_h^* \gamma_\tau^* \left(\frac{I}{2} + K \right) k_h (k_h^* W k_h)^{-1} k_h^* \left(\frac{I}{2} + K' \right) \gamma_\tau^* V \gamma_\tau i_h + i_h^* \gamma_\tau^* V \gamma_\tau i_h$$

où I désigne l'identité.

Définissons la forme bilinéaire sur $\mathcal{B}_h \times \mathcal{B}_h$:

$$a_{1_h}(b_h, b'_h) = (\nu b_h, b'_h)_{L^2(\Omega)} + \nu_0(\mathcal{R}_h b_h, b'_h)_{\mathcal{B}_h}.$$

La discrétisation du problème (E) est le problème (E_h) :

$$\begin{cases} a_{1_h}(b'_h, b'_h) + b_1(b'_h, p_h) = g_1(b'_h) \forall b'_h \in \mathcal{B}_h \\ b_1(b'_h, p'_h) = g_2(p'_h) \forall p'_h \in P_h \end{cases}$$

nous allons voir que le problème discrétisé est bien posé. On va faire l'étude du problème E_h .

Tout d'abord on a le lemme suivant :

Lemme 5.3.2 *Il existe $C > 0$ telle que*

$$(\mathcal{R}_h b_h, b_h)_{\mathcal{B}_h} \geq C \|\gamma_\tau i_h b_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \forall b_h \in \mathcal{B}_h.$$

Preuve. Comme l'opérateur W est positif, nous avons

$$(\mathcal{R}_h b_h, b_h)_{\mathcal{B}_h} \geq ((i_h^* \gamma_\tau V \gamma_\tau i_h b_h, \gamma_\tau i_h b_h)_{\mathcal{B}_h}).$$

Comme V est défini positif, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(\mathcal{R}_h b_h, b_h)_{\mathcal{B}_h} \geq C \|\gamma_\tau i_h b_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \forall b_h \in \mathcal{B}_h.$$

□

Théorème 5.3.3 *Il existe $\alpha \geq 0$ telle que*

$$b_1(b_h, p_h) = 0 \quad \forall p_h \in P_h \Rightarrow a_{1_h}(b_h, b_h) \geq \alpha \|b_h\|_{H(\text{div}; \Omega)}^2.$$

et il existe une constante positive β telle que

$$\sup_{b_h \in \mathcal{B}_h \setminus \{0\}} \frac{b_1(b_h, p_h)}{\|b_h\|_{\mathcal{B}_h}} \geq \beta \|p_h\|_{L^2(\Omega)}$$

alors le problème (E_h) a une solution unique

Preuve. Comme $\mathcal{B}_h \subset H(\text{div}; \Omega)$ d'après le lemme précédent on a la coercivité de a_{1_h} .

Soit $p_h \in P_h$ on lui associe $v \in H^1(\Omega)^3$ telle que :

$$\text{div } v = p_h \text{ dans } \Omega$$

et

$$\|v\|_{H^1(\Omega)^3} \leq C \|p_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Notons Π_h l'opérateur d'interpolation associé à l'élément de face, choisissons $b_h = \Pi_h v$. Nous avons alors

$$b_1(b_h, p_h) = b_1(v, p_h) = \|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

ce qui donne le résultat pour la condition inf-sup.

Le système linéaire résultant du problème (E_h) est symétrique de la forme :

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Les matrices A_1 et B_1 sont facilement calculables. Les inconnues de ce schéma de Galerkin sont alors :

$$\Sigma_f(\Omega) = \{\sigma_f(b) = \int_f b \cdot n d\gamma \quad \text{it f face dans } \mathcal{T}_h^1\},$$

$$\Sigma_T(\Omega) = \{\sigma_T(p) = p|_T, T \text{ tétraèdre dans } \Omega\}.$$

Dans le prochain paragraphe nous étudions la convergence de la méthode.

On étudie maintenant la convergence de la méthode pour le problème (E_h) . Dans l'analyse de la convergence de la méthode, on va utiliser le lemme (5.4.2) et le résultat suivant.

Lemme 5.3.3 *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_h b_h - \mathcal{R}_1 b, b_h - b'_h)_{\mathcal{B}_h} &\leq c \|b_h - b'_h\|_{H(\text{div}; \Omega)}. \\ (dist_{H^{1/2}}(W^{-1}(I/2 + K')\gamma_\tau b, Y_h) + \|b_h - b\|_{H(\text{div}; \Omega)}) \\ &\quad \forall b_h, b'_h \in \mathcal{B}_h, \forall b \in H(\text{div}; \Omega). \end{aligned}$$

Preuve. La preuve est basée sur le lemme de Cea appliquée à W et $k_h^* W k_h$ qui se trouve dans [9]; en outre on utilise la continuité de γ_τ de $H(\text{div}; \Omega)$ vers $H^{-1/2}(\Gamma)$.
□

Maintenant, on peut démontrer la convergence de la méthode.

Théorème 5.3.4 *Il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$\begin{aligned} \|b - b_h\|_{H(\text{div}; \Omega)} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq c \left\{ \inf_{v_h \in Z(g_2)} \|b - v_h\|_{H(\text{div}; \Omega)} \right. \\ &\quad \left. + dist_{H^{1/2}}(W^{-1}(\frac{I}{2} + K')\gamma_\tau b, Y_h) \right\} + \inf_{p'_h \in P_h} \|p - p'_h\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

où $Z(g_2) = \{b_h \in \mathcal{B}_h, b_1(b_h, p_h) = g_2(p_h), \forall p_h \in P_h\}$.

Preuve. D'une part, nous avons

$$\|b - b_h\|_{H(\text{div}; \Omega)} \leq \|b - v_h\|_{H(\text{div}; \Omega)} + \|v_h - b_h\|_{H(\text{div}; \Omega)}, \quad \forall v_h \in Z(g_2).$$

Comme $b_h - v_h \in N(b_1)$ et que la forme bilinéaire a_{1_h} est coercive sur $N(b_1)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \alpha \|b_h - v_h\|_{H(\text{div}; \Omega)} &\leq \sup_{w_h \in N(b_1) \setminus \{0\}} \frac{a_{1_h}(b_h - v_h, w_h)}{\|w_h\|_{L^2(\Omega)}} \\ &= \sup_{w_h \in N(b_1) \setminus \{0\}} \frac{a_{1_h}(b_h, w_h) - a_{1_h}(v_h, w_h)}{\|w_h\|_{L^2(\Omega)}}. \end{aligned}$$

De plus, on a $a_1(u, v_h) = a_{1_h}(u_h, v_h)$, si $v_h \in N(b_1)$. Ceci implique :

$$\begin{aligned} \alpha \|b_h - v_h\| &\leq \sup_{w_h \in N(b_1) \setminus \{0\}} \frac{a_1(b, w_h) - a_{1_h}(v_h, w_h)}{\|w_h\|_{L^2(\Omega)}} \\ &= \sup_{w_h \in N(b_1) \setminus \{0\}} \frac{\nu_0(b - v_h, w_h)_{L^2} + \nu_0(\mathcal{R}_1 b - \mathcal{R}_h v_h, w_h)_{\mathcal{B}_h}}{\|w_h\|_{L^2(\Omega)}}. \end{aligned}$$

D'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned} \forall q_h \in P_h, \quad \beta \|p_h - q_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sup_{w_h \in Z_h \setminus \{0\}} \frac{b(w_h, p_h - q_h)}{\|w_h\|_{H(\text{div}; \Omega)}} \\ &= \sup_{w_h \in Z_h \setminus \{0\}} \frac{-a_{1_h}(b_h, w_h) + a_1(b, w_h) - b_1(w_h, q_h - p)}{\|w_h\|_{H(\text{div}; \Omega)}}. \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit immédiatement. \square

5.4 Approximation du problème (F)

On va utiliser les sous espaces de dimension fini \mathcal{B}_h pour approcher b et \mathcal{P}_h pour approcher la variable p . Il nous reste à définir un espace d'approximation pour la composante tangentielle de u .

On introduit l'espace :

$$R_1(K) = \{\eta, \quad \eta(x) = (\alpha + \gamma x_1, \beta + \gamma x_2), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}.$$

puis

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h = \{p \in H^{-1/2}(\text{div}; \Gamma), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^1 \quad p|_K \in R^1(K); \quad \forall a = K \cap K' \text{ arête dans } \mathcal{T}_h^2, \\ \int_a p \cdot n_K + p \cdot n_{K'} = 0\}. \end{aligned}$$

C'est un espace inclus dans $H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$, [26], dont la dimension est égale au nombre des arêtes du maillage. La composante normale d'un vecteur de \mathcal{F}_h est continue au travers des arêtes. Les degrés de liberté sont

$$\Sigma_a = \{\sigma_a(\eta) = \int_a \eta \cdot \nu\}.$$

Cet élément fini est unisolvant dans $H^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$.

D'autre part, le choix des éléments finis pour discrétiser b et u_Γ est fait de telle sorte qu'on ait la continuité de la composante normale de l'induction magnétique.

Lemme 5.4.1 *Les espaces pour approcher b et u_Γ sont choisis tels que l'on ait*

$$b \cdot n = \text{rot}_\Gamma u_\Gamma \times n.$$

Preuve. Identique à celle faite pour la continuité de la composante tangentielle de h (lemme 5.2.1). \square

L'approximation du problème (F) est : pour une fonction $p^s \in H^1(\Omega)$ donnée, trouver $((b_h, u_{\Gamma_h}, \lambda_h), p_h) \in \mathcal{B}_h \times \mathcal{F}_h \times \mathcal{F}_h \times P_h$, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{a}_1((b_h, u_{\Gamma_h}, \lambda_h), (b', u', \lambda')) + \tilde{b}_1((b', u', \lambda'), p_h) & = \tilde{f}_1((b', u', \lambda')) \\ \forall (b', u', \lambda') \in \mathcal{B}_h \times \mathcal{F}_h \times \mathcal{F}_h & \\ \tilde{b}_1((b_h, u_{\Gamma_h}, \lambda_h), p') & = 0 \\ \forall p' \in P_h. & \end{array} \right. \quad (5.5)$$

On note Z'_h l'espace de dimension finie qui approche Z' :

$$Z'_h = \mathcal{B}_h \times \mathcal{F}_h \times \mathcal{F}_h.$$

On a le résultat suivant.

Théorème 5.4.1 *Il existe $\alpha \geq 0$ telle que*

$$\tilde{b}_1((b_h, u_{\Gamma_h}, \lambda_h), p_h) = 0 \quad \forall p_h \in P_h \Rightarrow \tilde{a}_1((b_h, u_{\Gamma_h}, \lambda_h), (b_h, u_{\Gamma_h}, \lambda_h)) \geq \alpha \|(b_h, u_{\Gamma_h}, \lambda_h)\|_{Z'_h}^2$$

et il existe une constante positive β telle que

$$\sup_{(b_h, u_{\Gamma_h}, \lambda_h) \in Z'_h \setminus \{0\}} \frac{\tilde{b}_1((b_h, u_{\Gamma_h}, \lambda_h), p_h)}{\|(b_h, u_{\Gamma_h}, \lambda_h)\|_{Z'_h}} \geq \beta \|p_h\|_{L^2(\Omega)}$$

alors le problème (F_h) a une solution unique

Preuve. Elle est similaire à celle pour le problème (C_h) . \square

Chapitre 6

Résultats numériques

6.1 Implémentation

Dans ce chapitre, on va donner des résultats numériques pour les formulations (C_h) et (E_h) pour lesquelles on a décrit plus en détail la forme matricielle du système linéaire résultant du problème discret.

Les algorithmes sont implantés dans un code [1] d'éléments finis 3D et ils sont testés sur la machine SGI Origin 2000 à l'Université d'Orsay. Chaque code se décompose en plusieurs parties :

- Première partie : lecture du maillage.

Il s'agit de construire les tableaux nécessaires à la formation de la matrice à partir du maillage du domaine.

- Deuxième partie : allocation dynamique pour la construction de la matrice.

Les coefficients non nuls de la matrice seront stockés dans un tableau à une ligne. On construira deux tableaux pour repérer la ligne et la colonne d'un élément du tableau.

- Troisième partie : construction de la matrice.

On utilise la méthode de Galerkin pour former les différents blocs des formulations. Pour la première formulation le couplage éléments finis/éléments de frontière se fait en utilisant les opérateurs de Calderon que l'on discrétise directement. Ainsi par exemple pour l'opérateur W , on est amené à calculer des intégrales doubles du type :

$$\int_T \int_{T'} \frac{n_x \cdot n_y}{\|x - y\|^3} - 3 \frac{n_x \cdot (x - y) n_y \cdot (x - y)}{\|x - y\|^3} \lambda_i(x) \lambda_j(y)$$

où $T \neq T'$ sont deux triangles de la triangulation du bord de Ω . Cette intégrale double est calculée par une formule de quadrature numérique.

Pour la deuxième formulation le couplage éléments finis/éléments de frontière se fait

à l'aide de l'opérateur de Neumann-Dirichlet qui est calculé à partir des matrices des opérateurs de Calderon.

- Quatrième partie : résolution du système.

Pour les deux formulations, le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} Az + B^t v = f, \\ Bz = g. \end{cases}$$

Remarque 6.1.1 Dans la deuxième équation pour la première formulation il y a un second membre g car l'inconnue dans le code de calcul est le champ total h ; la circulation du champ magnétique le long de l'arête de Γ de sommets i et j est :

$$\int_i^j h \cdot dl = \int_i^j h^s \cdot dl + (\varphi_j - \varphi_i).$$

La partie $\int_i^j h^s \cdot dl$ sera une contribution au vecteur g .

On va résoudre ce système en utilisant une méthode de complément de Schur . Dans le code, on a calculé séparément les matrices A et B . On élimine la variable z

$$z = A^{-1}f - A^{-1}Bv$$

et on résout le système

$$BA^{-1}B^t v = BA^{-1}f - g$$

La matrice $BA^{-1}B^t$ est symétrique et définie positive. On résout le système en utilisant une méthode de gradient conjugué. Les itérations sont stoppées dès que $\frac{\|BA^{-1}B^t v - BA^{-1}f\|}{\|BA^{-1}\|}$ est plus petit qu'un paramètre petit fixé. D'autre part, on aura précédemment calculé A^{-1} en résolvant un système par une méthode de gradient conjugué.

- Cinquième partie : calcul de la solution analytique dans la sphère et calcul de l'erreur.

Pour valider les formulations, on calcule le champ magnétique et l'induction magnétique dans une sphère de perméabilité constante $\mu = \mu_0 \mu_r$ et de rayon $R = 1m$, immergée dans un champ source, h^s . Comme la solution analytique est connue, [21], on peut calculer l'erreur quadratique moyenne :

$$\text{ErrH} = \left[\frac{1}{V} \int_{\Omega} \frac{|h_n - h_a|^2}{|h_a|^2} dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

TAB. 6.1 – Erreur et CPU en fonction de μ_r

| μ_r | ErrH | Rot | CPU | ErrH | Rot | CPU |
|---------|------|----------------------|-----|------|-----------------------|-----|
| 10 | 5 | .17.10 ⁻² | 16 | 4 | 0.43.10 ⁻² | 28 |
| 100 | 6.2 | .27.10 ⁻² | 22 | 6.2 | 0.69.10 ⁻² | 34 |
| 1000 | 6.4 | .33.10 ⁻² | 24 | 6.3 | 0.90.10 ⁻² | 36 |
| 10000 | 6.5 | .33.10 ⁻² | 28 | 6.46 | 0.98.10 ⁻² | 38 |

TAB. 6.2 – Erreur et CPU comme fonction de μ_r

| μ_r | ErrB | Div | CPU | ErrB | Div | CPU |
|---------|------|--------------------|-----|------|--------------------|-----|
| 10 | 3 | 4.10 ⁻² | 2 | 3 | 3.10 ⁻² | 9 |
| 100 | 3 | 4.10 ⁻² | 3 | 4 | 3.10 ⁻² | 15 |
| 1000 | 4 | 5.10 ⁻² | 7 | 4 | 4.10 ⁻² | 24 |
| 10000 | 5 | 5.10 ⁻² | 9 | 4 | 5.10 ⁻² | 36 |

$$\text{Rot} = \left[\frac{1}{V} \int_{\Omega} \frac{|\text{rot } \mathbf{h}_n|^2}{|\mathbf{h}_a/R|^2} dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\text{ErrB} = \left[\frac{1}{V} \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_a|^2}{|\mathbf{b}_a|^2} dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{Div} = \left[\frac{1}{V} \int_{\Omega} \frac{|\text{div } \mathbf{b}_n|^2}{|\mathbf{b}_a/R|^2} dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

où \mathbf{h}_n et \mathbf{b}_n sont les solutions numériques données par le code.

On prend deux maillages de la sphère de rayon $R = 1m$

– S1 a 360 tétraèdres dans Ω , 120 triangles sur Γ , (voir figure 6.1) et $\mathbf{h} = .353m$,

– S2 a 1044 tétraèdres dans Ω , 192 triangles sur Γ et $\mathbf{h} = .315m$.

On a comparé les deux méthodes avec différentes valeurs de la perméabilité : $\mu_r = 10, 100, 1000$ et 10000 à l'intérieur de la sphère.

Les tables 6.1 et 6.2 donnent l'erreur et le temps de calcul. Tout d'abord, on peut voir que lorsque μ_r augmente, l'erreur augmente légèrement pour les deux formulations mixtes hybrides.

On voit aussi que le "Rot" et le "Div" restent toujours petits, mais, pour le maillage S1, la première formulation a une erreur plus importante que la deuxième. L'ordre de l'erreur ErrH est de 6 %, tandis que l'ordre de l'erreur ErrB est de 4 %.

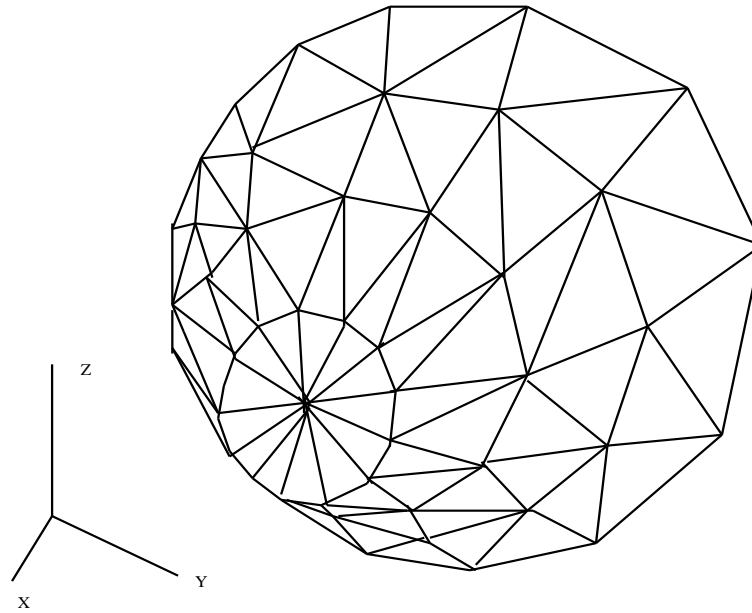


FIG. 6.1 – Maillage S1 de la sphère complète

D'autre part, pour les deux formulations, on remarque que le temps de calcul est sensible à μ_r . Cependant il reste petit pour les deux méthodes. On peut néanmoins remarquer que le temps de calcul pour la deuxième méthode est plus petit que celui pour la première méthode pour un maillage grossier et il est identique pour un maillage plus fin.

Deuxième partie

Comparaison entre diverses
méthodes de discrétisation de
l'opérateur de Poincaré-Steklov

Introduction

On présente trois méthodes pour discrétiser l'opérateur de Poincaré-Steklov. Deux de ces méthodes sont bien connues et souvent utilisées, la troisième est nouvelle. Ces méthodes sont basées soit sur la technique des éléments infinis, soit sur les équations de Calderon, soit sur la théorie des équations intégrales. Une formulation mixte hybride de la magnétostatique déjà étudiée, [1], va nous permettre de comparer ces différentes méthodes. Une comparaison en terme de précision, performances, simplicité de programmation est donnée,[27].

On considère le problème de la magnétostatique mis sous la forme :

$$\operatorname{div}(\mu h) = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^3, \quad (6.1)$$

$$\operatorname{rot} h = j \quad \text{dans } \mathbf{R}^3 \quad (6.2)$$

où l'inconnue h est le champ magnétique, j la densité du courant et μ la perméabilité magnétique.

Lorsqu'on résout (9.30)-(9.31), on écrit

$$h = h^s + \operatorname{grad} \varphi \quad \text{dans } \Omega' \quad (6.3)$$

où h^s est le champ source solution de

$$\operatorname{div} h^s = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^3,$$

$$\operatorname{rot} h^s = j \quad \text{dans } \mathbf{R}^3$$

et φ est un potentiel scalaire (cela est dû au fait que Ω et Ω' sont supposés connexes et simplement connexes; la variable φ est déterminée à une constante près, [10]).

En injectant l'équation (6.3) dans (9.30), on obtient :

$$-\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{div}(\mu h^s). \quad (6.4)$$

On va coupler une méthode d'éléments finis avec une méthode intégrale de frontière. L'équation (6.4) devient :

$$\Delta \varphi = 0, \quad (6.5)$$

car $\mu = \mu_0$ et $\operatorname{div}(h^s) = 0$ dans Ω' . En écrivant $h = \operatorname{grad} \varphi$ et $h' = \operatorname{grad} \varphi'$ avec

$$\Delta \varphi = 0,$$

$$\Delta \varphi' = 0,$$

on obtient

$$\int_{\Omega'} h \cdot h' = \int_{\Omega'} \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \varphi' = \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \varphi' ds \quad (6.6)$$

où n la normale rentrante à Ω .

En considérant P l'opérateur extérieur de Poincaré-Steklov, on peut écrire (6.6)

$$\int_{\Omega'} h \cdot h' = \int_{\Gamma} P(\varphi) \varphi' ds.$$

La définition et les propriétés de P seront rappelées en détail dans la suite.

Chapitre 7

Opérateur de Poincaré-Steklov

7.1 Notations et espaces

Prenant une condition limite $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il est connu, [10] qu'il existe une solution unique du problème :

$$\Delta\psi = 0 \text{ dans } \Omega', \quad (7.1)$$

$$\psi = \varphi \text{ sur } \Gamma \quad (7.2)$$

dans l'espace de Beppo-Levi

$$W^1(\Omega') = \left\{ \psi \in \mathcal{D}'(\Omega') ; \frac{\psi}{(1+r^2)^{1/2}} \in L^2(\Omega'), \text{ grad } \psi \in (L^2(\Omega'))^3 \right\}.$$

En outre, $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

L'opérateur de Poincaré-Steklov P est définie par :

$$P : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

$$\varphi \longmapsto \frac{\partial\psi}{\partial n},$$

où ψ est la solution du problème de Dirichlet (7.1)-(7.2) et la normale n est orientée à l'intérieur de Ω . L'opérateur P est symétrique et défini positif sur L^2 : en effet, pour tout φ, φ' dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on pose ψ et ψ' les fonctions de $W^1(\Omega')$, solutions de (7.1) – (7.2) avec comme donnée de Dirichlet φ et φ' respectivement. On a alors :

$$\langle P(\varphi), \varphi' \rangle = \int_{\Gamma} \frac{\partial\psi}{\partial n} \varphi' = \int_{\Omega'} \text{grad } \psi \cdot \text{grad } \psi'$$

$$= \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \psi'}{\partial n} = \langle P(\varphi'), \varphi \rangle$$

et

$$\langle P(\varphi), \varphi \rangle = \int_{\Omega'} |\text{grad } \psi|^2 > 0 \text{ pour tout } \psi \neq 0.$$

7.2 Application de l'opérateur de Poincaré-Steklov pour un problème de la magnétostatique

L'opérateur P apparaît dans la formulation du problème de la magnétostatique comme suit.

En écrivant que le champ magnétique h vaut $h = h^s + \text{grad } \varphi$ dans \mathbf{R}^3 et en le reportant dans l'équation (9.31) on obtient la formulation variationnelle :

trouver $\varphi \in W^1(\mathbf{R}^3)$ telle que :

$$\int_{\mathbf{R}^3} \mu \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi' = - \int_{\mathbf{R}^3} \mu h^s \cdot \text{grad } \varphi' \quad \forall \varphi' \in W^1(\mathbf{R}^3).$$

En divisant l'intégrale sur \mathbf{R}^3 en une intégrale sur Ω et une autre sur le complémentaire de Ω , et en écrivant que μ est constante et vaut μ_0 en dehors de Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi' + \mu_0 \int_{\Omega'} \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi' \\ &= - \int_{\Omega} \mu h^s \cdot \text{grad } \varphi' - \int_{\Omega'} \mu_0 h^s \cdot \text{grad } \varphi'. \end{aligned}$$

Maintenant, de la relation $\text{div } h^s = 0$ dans Ω' , on obtient à l'aide de la formule de Green :

$$\int_{\Omega'} \mu_0 h^s \cdot \text{grad } \varphi' = \int_{\Gamma} \mu_0 h^s \cdot n \varphi' ds.$$

Sachant que φ satisfait

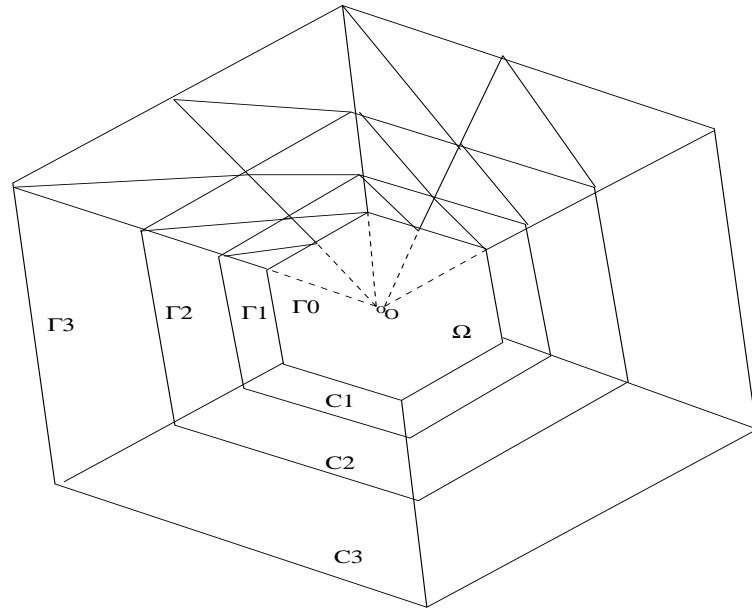
$$\Delta \varphi = 0 \text{ dans } \Omega',$$

on peut écrire :

$$\int_{\Omega'} \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi' = \langle P(\varphi'), \varphi \rangle.$$

On obtient ainsi une formulation en potentiel de la magnétostatique :
trouver φ tel que

$$\int_{\Omega} \mu \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi' + \langle \mu_0 P(\varphi'), \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \mu h^s \cdot \text{grad } \varphi' + \int_{\Gamma} \mu_0 h^s \cdot n \varphi' ds. \quad (7.3)$$

FIG. 7.1 – Maillage multi-couche du domaine extérieur à Ω

C'est un exemple d'utilisation de l'opérateur de Poincaré-Steklov pour résoudre le problème de la magnéto-statique dans \mathbf{R}^3 tout entier.

Dans la suite, on décrit successivement les trois méthodes de discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Steklov basées sur les techniques : éléments infinis, équations intégrales et équations de Calderon

7.3 Description des méthodes de discrétisation

7.3.1 la méthode des éléments infinis

On suppose de plus l'hypothèse suivante : Ω est convexe. On maille Ω' par des couches homothétiques en utilisant la méthode décrite dans [40]. On considère un point O dans Ω et une constante $\zeta > 1$. Alors, pour tout entier k , on note Γ_k le polyèdre qui est l'image de Γ par l'homothétie de rapport ζ^k et de centre O . Le domaine C_k qui est entre deux polyèdres consécutifs Γ_k et Γ_{k+1} forme une couche, ($\Gamma = \Gamma_0$).

Dans [40], l'auteur étudie le problème dont les équations sont (7.1)-(7.2) avec un maillage multi-couche en dehors de Ω . La solution ψ minimise la fonctionnelle

d'énergie :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega'} |\text{grad } \psi|^2.$$

Elle est approchée par une méthode d'éléments finis de Lagrange. Chaque couche est maillée en tétraèdres, (cf figure 7.1). On peut noter qu'à l'infini les tétraèdres de la triangulation de Ω' deviennent de plus en plus larges.

Les sommets des tétraèdres sont sur les bords de la couche. Si on ne considère que la première couche, la matrice de rigidité qui correspond à la discrétisation de l'énergie, peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} K_0 & -A^t \\ -A & K'_0 \end{pmatrix}$$

où K_0 et A sont deux matrices qui correspondent respectivement aux inconnues qui sont sur Γ et sur l'autre bord de la couche. De même, la matrice de rigidité pour un ensemble constitué de 2^l couches s'écrit sous forme de blocs :

$$\begin{pmatrix} K_l & -A_l^t \\ -A_l & K'_l \end{pmatrix}.$$

On a les relations de récurrence, [40] :

$$K_{l+1} = K_l - A_l^t (K_l + K'_l)^{-1} A_l,$$

$$K'_{l+1} = K'_l - A_l (K_l + K'_l)^{-1} A_l^t,$$

$$A_{l+1} = A_l (K_l + K'_l)^{-1} A_l.$$

Il est à noter que le calcul de (R_{l+1}) à partir de (R_l) implique l'inversion de matrices pleines. D'autre part, l'auteur a démontré que la suite des matrices (R_l) converge rapidement vers R quand $l \rightarrow \infty$ où R est exactement la matrice de rigidité de l'opérateur de Poincaré-Steklov. C'est une matrice qui est symétrique et définie positive.

Ainsi, pour calculer cette matrice R , qui correspond à la discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Steklov, on fixe l et on calcule la matrice R_l qui est la matrice de rigidité du domaine constitué de 2^l couches. Si on veut la matrice de rigidité dans un domaine constitué de 2^{l+1} couches, on utilise les formules de récurrence. On remarque alors que la méthode de discrétisation dépend de deux paramètres, ζ et du coefficient de proportionnalité l .

7.3.2 La méthode des équations intégrales

On rappelle la méthode de discrétisation pour l'opérateur de Poincaré-Steklov décrite dans [3] et [4]. On considère une distribution de charges fictives sur la frontière Γ . Ensuite, on écrit ψ solution du problème (7.1), (7.2) comme un potentiel de simple couche de densité q :

$$\psi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q(y)}{\|x - y\|} ds_y \quad \forall x \in \Omega'. \quad (7.4)$$

La dérivée normale sur le bord est :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x) = q(x)/2 + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} q(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right) ds_y, \quad x \in \Gamma. \quad (7.5)$$

On introduit V et K' , le potentiel de simple couche et l'adjoint du potentiel de double couche respectivement : pour $x \in \Gamma$,

$$V(\lambda)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \lambda(y) \frac{1}{\|x - y\|} ds_y \quad \forall \lambda \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

$$K'(q)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} q(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right) ds_y, \quad \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

A partir des équations (7.4) et (7.5), l'opérateur P vérifie :

$$\langle P\varphi, \varphi' \rangle = \langle q, \varphi' \rangle / 2 + \langle K'q, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi' \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (7.6)$$

où la relation entre φ et q est :

$$\langle \varphi, q' \rangle = \langle Vq, q' \rangle \quad \forall q' \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (7.7)$$

La matrice de rigidité "extérieure", $R = (r_{ij})$ est définie par :

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n} \lambda_i = (R\varphi)_i = \sum_j r_{ij} \varphi_j$$

où $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ représente les degrés de liberté associés à la variable φ sur Γ . Appliquons une méthode de Galerkin où ψ est discrétisée avec les éléments finis de Lagrange (P_1)

$$\psi = \varphi = \sum_{i=1}^{nsg} \varphi_i \lambda_i$$

où nsg est nombre de sommets sur Γ et q avec des éléments constants par triangle de Γ

$$q = \sum_{i=1}^{ntg} q_i \chi_i$$

où ntg est le nombre de triangles de Γ et χ_i est la fonction indicatrice du triangle numéro i .

On discrétise l'équation (7.4) :

$$\psi(x) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\|x - y\|} \sum_{i=1}^{ntg} q_i \chi_i ds_y.$$

D'après la définition de la fonction χ_i , on a :

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{ntg} q_i \int_{S(i)} \frac{1}{\|x - y\|} ds_y$$

où $S(i)$ est le triangle numéro i .

On multiplie l'égalité par une fonction test χ_j et on intègre sur Γ :

$$\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{nsg} \varphi_i \lambda_i \chi_j ds_x = \sum_{i=1}^{ntg} q_i \int_{\Gamma} \int_{S(i)} \chi_j \frac{1}{\|x - y\|} ds_y ds_x.$$

Clairement, par définition de χ_j , les deux membres de cette relation sont nuls dès que x n'est pas sur le triangle $S(j)$. Notons aussi que la deuxième variable d'intégration parcourt le triangle $S(i)$. L'équation devient si x appartient au triangle $S(j)$:

$$\int_{S(j)} \sum_{i=1}^{nsg} \varphi_i \lambda_i ds_x = \sum_{i=1}^{ntg} q_i \int_{S(j)} \int_{S(i)} \frac{1}{\|x - y\|} ds_y ds_x.$$

Ecrivons la relation sous forme matricielle :

$$\sum_{i=1}^{nsg} b_{ji} \varphi_i = \sum_{i=1}^{ntg} Q_{1ij} q_i$$

soit

$$B\varphi = Q_1 q$$

où

• B est une matrice de dimension $ntg \times nsg$ dont les termes sont :

$$b_{ij} = \begin{cases} \int_{S(i)} \lambda_j(x) ds_x & = \frac{|S(i)|}{3} \text{ si } j \text{ est l'un des trois sommets du triangle } S(i), \\ 0 & \text{ sinon} \end{cases}$$

où $|S(i)|$ est la surface du triangle $S(i)$

• Q_1 est une matrice symétrique pleine, de dimension $ntg \times ntg$ dont les termes sont donnés par :

$$Q_{1ij} = \int_{S(i)} \int_{S(j)} \frac{1}{\|x - y\|} ds_x ds_y.$$

La détermination de ces termes se fait par un calcul analytique de l'intégrale

$$\int_{S(i)} \frac{1}{\|x - y\|} ds_y$$

et à l'aide de la méthode de Gauss pour la seconde intégrale.

En tenant compte de l'écriture du potentiel φ et de la densité q , il vient

$$R\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{ntg} q_i \chi_i + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{ntg} q_i \chi_i \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right) ds_y$$

d'où

$$R\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{ntg} q_i \chi_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{ntg} q_i \int_{S(i)} \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right) ds_y.$$

On multiplie l'équation obtenue par une fonction test λ_j et on intègre sur Γ :

$$\int_{\Gamma} (R\varphi) \lambda_j ds_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{ntg} q_i \int_{\Gamma} \chi_i(x) \lambda_j(x) ds_x + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{ntg} q_i \int_{\Gamma} \int_{S(i)} \lambda_j(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right) ds_y ds_x$$

soit

$$\int_{\Gamma} (R\varphi) \lambda_j ds_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{ntg} q_i \int_{S(i)} \lambda_j(x) ds_x + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{ntg} q_i \int_{\Gamma} \int_{S(i)} \lambda_j(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right) ds_y ds_x$$

d'où

$$\int_{\Gamma} (R\varphi) \lambda_j ds_x = \sum_{i=1}^{ntg} q_i \left(\frac{1}{2} \int_{S(i)} \lambda_j ds_x + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{S(i)} \lambda_j(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right) ds_y ds_x \right).$$

Cette relation s'écrit sous forme matricielle :

$$\sum_{i=1}^{nsg} \varphi_i \int_{\Gamma} R \lambda_i \lambda_j ds_x = \sum_{i=1}^{ntg} Q_{2ij} q_i$$

ou encore

$$R\varphi = Q_2 q$$

avec

- R correspond à la matrice de rigidité $nsg \times nsg$
- Q_2 est une matrice $nsg \times ntg$ dont les termes sont donnés par :

$$Q_{2ij} = \frac{1}{2} \int_{S(j)} \lambda_i(x) ds_x + \frac{1}{4\pi} \int_{S(i)} \int_{S(j)} \lambda_i(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right) ds_y ds_x.$$

La matrice de rigidité R est obtenue en éliminant q . En effet, nous avons les relations :

$$B\varphi = Q_1q$$

et

$$R\varphi = Q_2q$$

et comme Q_1 est régulière, on obtient :

$$R\varphi = Q_2Q_1^{-1}B\varphi.$$

A noter que la matrice obtenue R n'est pas symétrique. On obtient une bonne approximation en prenant la partie symétrique $\frac{R+R^t}{2}$.

7.3.3 La méthode des équations de Calderon

Ici W et K' sont l'opérateur hypersingulier et l'adjoint de l'opérateur de double couche (respectivement) dont on rappelle la définition : Pour $x \in \Gamma$, on rappelle qu'ils sont définis par :

$$W(u)(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|} \right) u(y) ds_y,$$

$$K'(\lambda)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \lambda(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{\|x-y\|} \right) ds_y.$$

On rappelle le résultat suivant déjà cité au premier chapitre.

Lemme 7.3.1 *On suppose que Γ est C^2 , les opérateurs intégraux précédemment définis*

$$V : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma),$$

$$K : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma),$$

$$K' : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

$$W : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma),$$

sont alors continues. En outre V et W sont autoadjoints et il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\langle W(u), u \rangle \geq 0,$$

$$\langle \lambda, V(\lambda) \rangle \geq \beta \|\lambda\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

Maintenant, on donne les équations de Calderon sur Γ en utilisant des opérateurs intégraux. On définit

$$\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial n_+}$$

où ψ est la solution de (7.1)-(7.2) et n_+ est la normale unitaire sortante de Ω . On a :

$$\varphi = \frac{1}{2}\varphi + K\varphi - V\lambda, \quad (7.8)$$

$$\lambda = -W\varphi + \frac{1}{2}\lambda - K'\lambda. \quad (7.9)$$

(Tous ces opérateurs sont définis par rapport à n_+). Alors, l'opérateur V est un isomorphisme de $H^{-1/2}(\Gamma)$ vers $H^{1/2}(\Gamma)$. Donc, de (7.8), on obtient

$$\lambda = V^{-1}\left(-\frac{I}{2} + K\right)\varphi. \quad (7.10)$$

où I est l'opérateur identité.

Reportons l'équation (7.10) dans (7.9), on en déduit que

$$\lambda = -W\varphi + \left(\frac{I}{2} - K'\right)V^{-1}\left(-\frac{I}{2} + K\right)\varphi, \quad (7.11)$$

d'où on obtient :

$$P = W + \left(-\frac{I}{2} + K'\right)V^{-1}\left(-\frac{I}{2} + K\right).$$

(La normale unitaire n est dans le sens opposé).

Du lemme 7.3.1, l'opérateur $W + \left(-\frac{I}{2} + K'\right)V^{-1}\left(-\frac{I}{2} + K\right)$ est symétrique et défini positif. Les opérateurs W , K , K' et V sont discrétisés en utilisant une méthode de Galerkin où φ est discrétisé avec les éléments finis de Lagrange (P_1) et λ avec des éléments constants sur chaque triangle. Ainsi l'approximation de P est défini par :

$$R_h := i_h^* \gamma^* W \gamma i_h + i_h^* \gamma^* (1/2 - K') k_h (k_h^* V k_h)^{-1} k_h^* (1/2 - K) \gamma i_h.$$

où i_h, k_h, i_h^*, k_h^* sont définies dans le paragraphe 5.3.1 Il s'ensuit que, la matrice de rigidité R_h qui correspond à cette discrétisation est nécessairement une matrice symétrique.

Remarque 7.3.1 Dans le calcul de R_h on n'a pas inversé V mais V_h qui est l'opérateur linéaire discret qui approche V .

7.4 Exemple : un problème de la magnétostatique

On rappelle la formulation variationnelle du problème [5], [1] qui va nous permettre de tester les différentes méthodes de discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Steklov.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour un } h^s \text{ donné dans } (H^1(\mathbf{R}^3))^3, \\ \text{trouver } (h, v, \varphi) \in H(\text{rot}, \Omega) \times H_0(\text{div}^0, \Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \forall h' \in H(\text{rot}, \Omega), \forall \varphi' \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ et } \forall v' \in H_0(\text{div}^0, \Omega) \\ \int_{\Omega} \mu h \cdot h' + \langle \mu_0 P(\varphi), \varphi' \rangle - \int_{\Omega} \text{rot } h' \cdot v = - \langle \mu_0 h^s \cdot n, \varphi' \rangle, \\ - \int_{\Omega} \text{rot } h \cdot v' = 0 \end{array} \right. \quad (7.12)$$

où h est le champ magnétique et φ est le potentiel de réaction.

Afin de discrétiser ces équations, on approche le champ magnétique par les éléments d'arête de Nédélec, la variable v avec les éléments de facette et φ avec les éléments de Lagrange (P_1). Les degrés de liberté sont alors :

- les circulations de champ magnétique h sur les arêtes du maillage dans Ω ,
- le potentiel scalaire de réaction φ sur les sommets de Γ ,
- le flux du potentiel vecteur v à travers les faces qui sont à l'intérieur $\overline{\Omega}$.

Il est possible d'écrire la formulation discrète du problème sous forme matricielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} Az + B^t v = f, \\ Bz = g, \end{array} \right. \quad (7.13)$$

qui est résolu en utilisant la méthode d'Uzawa [7]. Il faut souligner le fait que dans les tests numériques présentés ci-dessous, la même méthode de résolution du système linéaire a été utilisée, on change seulement la matrice R qui intervient dans la matrice A .

Pour que le problème mixte soit bien posé, il est nécessaire que la discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Steklov nous donne une matrice R définie positive pour que la matrice A reste définie positive. Ceci est vérifié dans la première et la troisième méthode, mais ce n'est pas vérifié dans la deuxième méthode où la matrice R n'est pas toujours définie positive. ¹

¹ce résultat est donné dans [12].

Chapitre 8

Tests numériques

Dans cette section, on considère deux fois le même problème physique avec trois maillages différents. On va tester les différentes discrétisations sur deux cas tests :

- on considère une sphère de rayon $R = 1m$ avec une perméabilité constante $\mu = \mu_0 \mu_r$ immergée dans un champ extérieur constant h^s qui est le champ source. La solution analytique de ce problème est connue.
- dans le second test, le domaine de calcul est une sphère dans laquelle se trouve une seconde sphère, (voir figure 8.1). Dans chaque sphère, on suppose la perméabilité constante. On sait alors, [17], que la discontinuité de la perméabilité à l'intérieur du domaine de calcul implique des difficultés pour obtenir la convergence de la méthode.

Dans le premier cas, le centre O de l'homothétie est tout simplement le centre de la sphère et pour le deuxième cas test, c'est le centre commun des deux sphères. Dans cette méthode de discrétisation, on construit le maillage de la première couche puis on calcule la matrice de rigidité de la première couche [40]. Ensuite, on utilise la méthode itérative donnée dans [40] pour calculer la matrice de rigidité de $2, 4, \dots, 2^l$

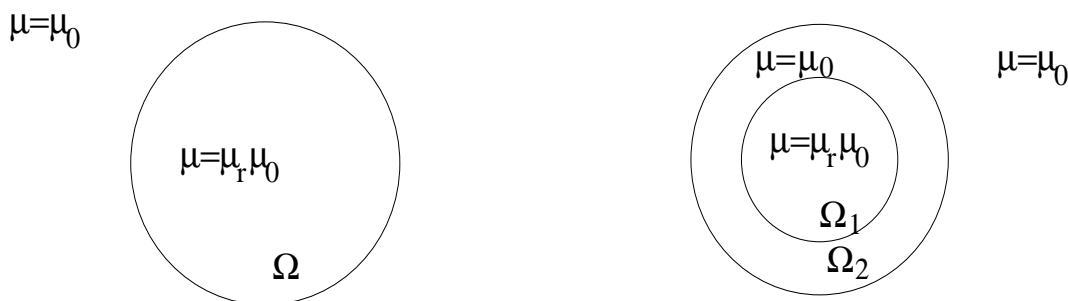


FIG. 8.1 – Les deux domaines de calcul

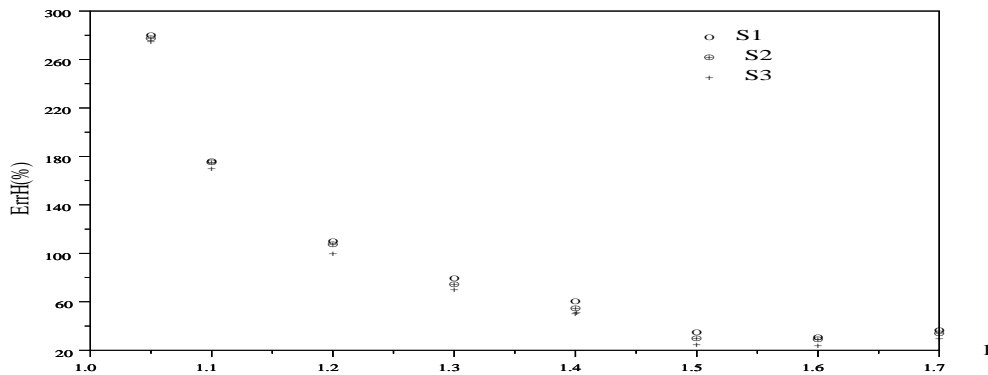


FIG. 8.2 – ErrH comme fonction de ζ , $l = 1$ avec S1, S2, S3

couches.

8.1 Cas d'une seule sphère

Pour ce test numérique, le champ magnétique est calculé pour une sphère de perméabilité constante $\mu = \mu_0 \mu_r$ et de rayon $R = 1m$, immergée dans un champ extérieur constant, h^s . La solution analytique de ce problème est donnée dans [21] par :

$$h_a = \frac{3h^s}{\mu_r + 2}.$$

Dans la suite, on étudie l'erreur quadratique du champ magnétique ErrH. Pour cette étude, on utilise trois maillages différents de la sphère dont les caractéristiques sont données par :

- S1 a 360 tétraèdres dans Ω et 120 triangles sur Γ et $\mathbf{h} = 0.445m$,
- S2 a 1044 tétraèdres dans Ω et 192 triangles sur Γ et $\mathbf{h} = 0.315m$,
- S3 a 6192 tétraèdres dans Ω et 720 triangles sur Γ et $\mathbf{h} = 0.171m$.

8.1.1 Optimization de l et ζ

Pour ces différents tests, on a choisi $\mu_r = 100$ dans la sphère, et on a donné plusieurs valeurs à la constante de proportionnalité ζ et au paramètre l .

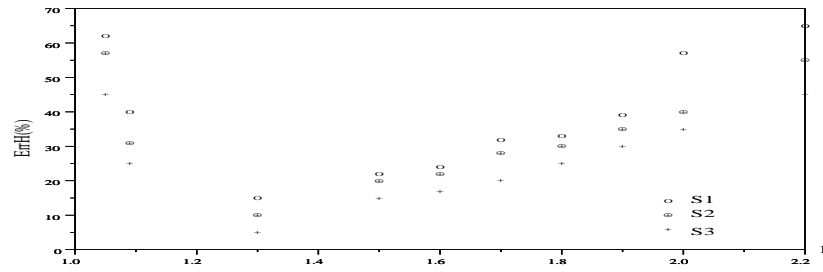


FIG. 8.3 – ErrH comme fonction de ζ , $l = 3$ avec S1, S2, S3

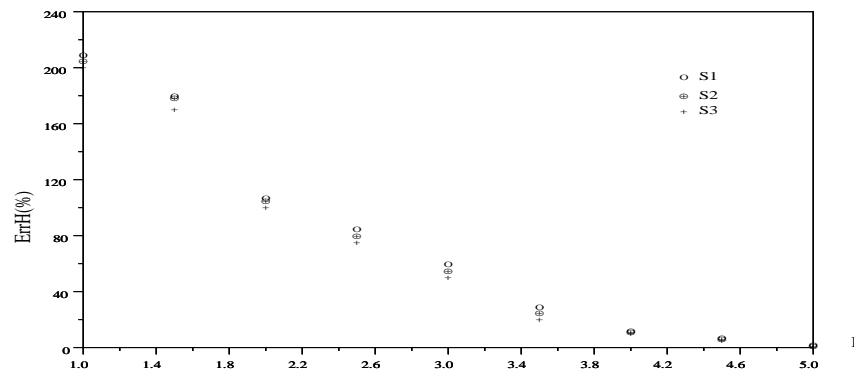


FIG. 8.4 – ErrH comme fonction de l , $\zeta = 1.05$ avec S1, S2, S3

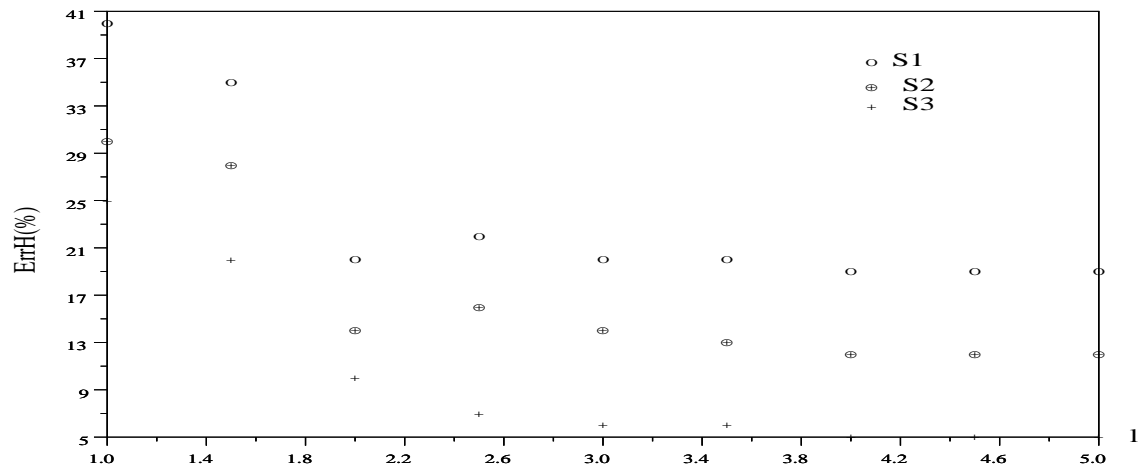


FIG. 8.5 – ErrH comme fonction de l , $\zeta = 1.3$ avec S1, S2, S3

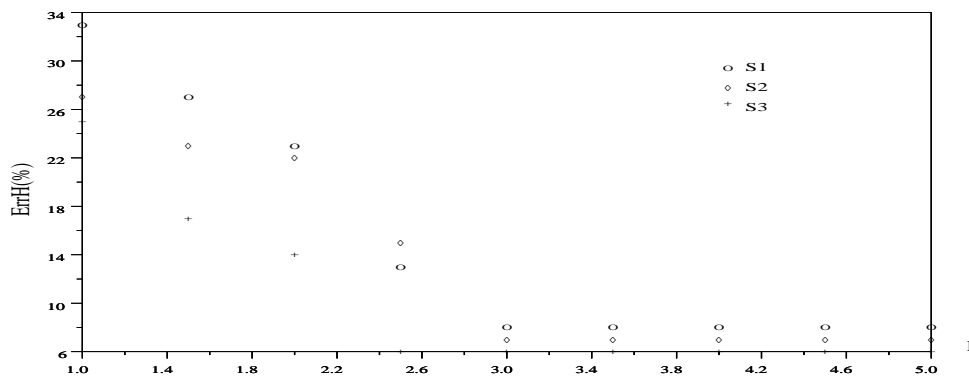


FIG. 8.6 – ErrH comme fonction de l , $\zeta = 1.5$ avec S1, S2, S3

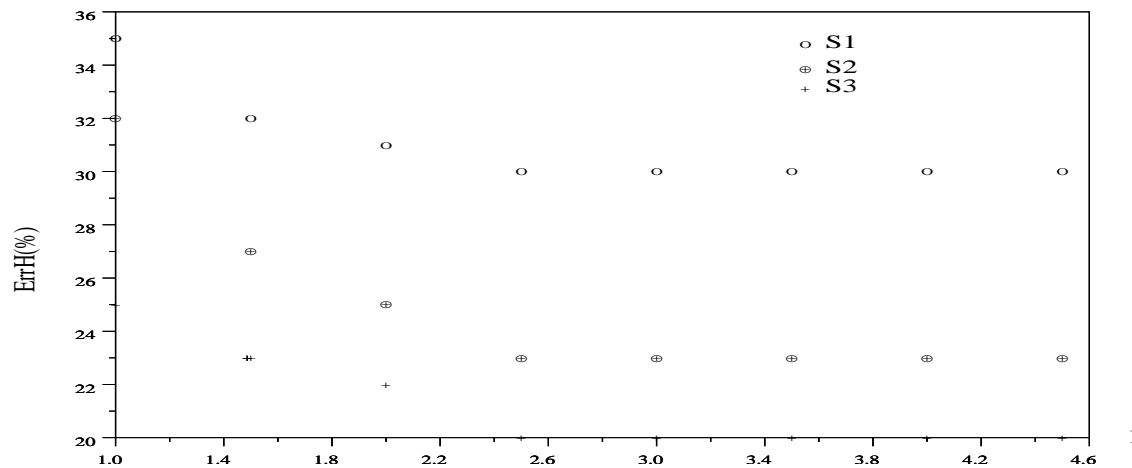


FIG. 8.7 – ErrH comme fonction de l , $\zeta = 1.7$ avec S1, S2, S3

D'une part, les figures 8.3 et 8.4 montrent l'influence du coefficient ζ sur les résultats numériques. On peut remarquer que si $\zeta = 1.05$, $ErrH$ décroît quand le nombre de couches augmente. Mais si $\zeta = 1.3$ ou 1.5 ou 1.7 , l'erreur diminue et reste constante de l'ordre de 6 % même si on augmente le nombre de couches.

D'autre part, les figures 8.5, 8.6 et 8.7 donnent des résultats qui montrent l'influence du coefficient l dans la méthode. On remarque qu'il existe un intervalle borné dans lequel l'erreur $ErrH$ est petite.

Cette étude va nous permettre de fixer l et ζ pour optimiser la méthode :

- un critère raisonnable pour le coefficient ζ est que $\zeta - 1 \approx \mathbf{h}$ ce qui signifie que la première couche de Ω' doit être discrétisée avec des éléments de même taille que ceux de Ω .
- l sera choisi dans l'intervalle où l'erreur $ErrH$ est la plus petite.

8.2 Comparaison entre les trois méthodes de discrétisation

Maintenant, on va comparer les trois méthodes de discrétisation utilisées dans la formulation variationnelle étudiée dans le chapitre 7. Pour la première méthode on a utilisé les valeurs optimales de l et ζ pour chaque maillage. Les caractéristiques du problème sont :

- $l = 8$ et $\zeta = 1.05$ dans S1, S2,
- $l = 5$ et $\zeta = 1.05$ dans S3.

On étudie tout d'abord la matrice de rigidité résultante des divers discrétisations de l'opérateur de Poincaré-Steklov. La figure 8.8 présente la partie supérieure de la matrice du système (7.13) qui est la même pour les trois méthodes. La partie tri-

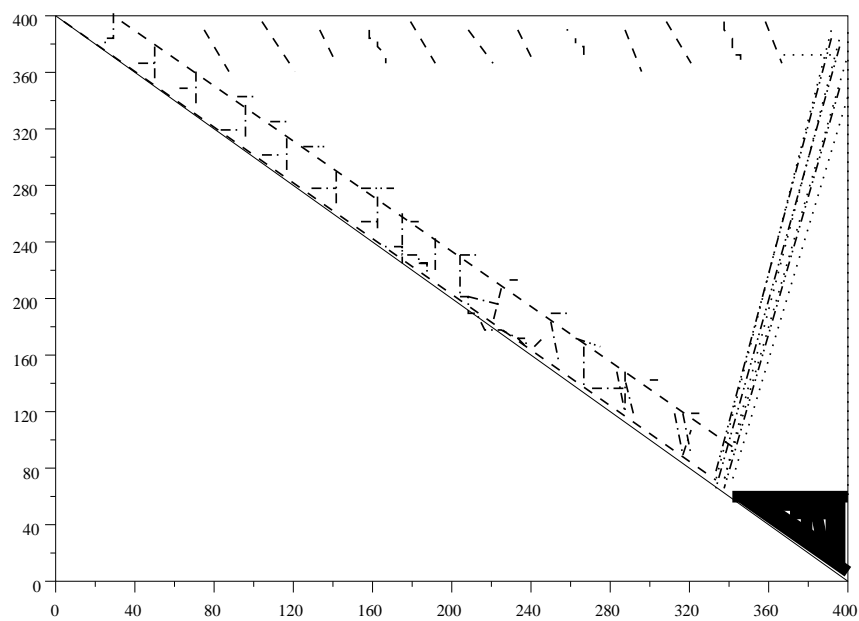


FIG. 8.8 – Partie supérieure de la matrice du système (7.13)

| | $\ R_1 - R_2\ _2$ | $\ R_1 - R_3\ _2$ | $\ R_2 - R_3\ _2$ |
|----|-------------------|-------------------|-------------------|
| S1 | ≈ 2.34 | ≈ 2.14 | ≈ 0.22 |
| S2 | ≈ 2.24 | ≈ 2.06 | ≈ 0.20 |
| S3 | ≈ 2.6 | ≈ 2.58 | ≈ 1.11 |

TAB. 8.1 – Comparaison entre les matrices de rigidité

| μ_r | ErrH (%) | CPU | it | ErrH (%) | CPU | it | ErrH (%) | CPU | it |
|---------|--------------|---------------|--------------|--------------|----------------|-----|-------------|------------------|-----|
| 10 | ≈ 10 | ≈ 8 s | ≈ 70 | ≈ 7 | ≈ 44 s | 112 | ≈ 3 | ≈ 2380 s | 423 |
| 100 | ≈ 14 | ≈ 8 s | ≈ 67 | ≈ 10 | ≈ 46 s | 120 | ≈ 4 | ≈ 2390 s | 423 |
| 1000 | ≈ 14 | ≈ 8 s | ≈ 67 | ≈ 10 | ≈ 46 s | 117 | ≈ 4 | ≈ 2380 s | 418 |

TAB. 8.2 – ErrH avec la méthode des éléments infinis avec S1, S2 et S3.

angulaire supérieure de la matrice pleine de dimension $nsg \times nsg$ correspond à la discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Steklov, (nsg désigne le nombre des sommets du maillage de Γ). Lorsque le nombre nsg augmente, ($nsg = 62$ dans S1, $nsg = 98$ dans S2 et $nsg = 362$ dans S3), la taille de cette matrice pleine augmente. De plus, la table 8.1 donne la différence entre les matrices de rigidité dans la norme :

$$\|R\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^{nsg} \setminus \{0\}} \frac{\|Rx\|_2}{\|x\|_2}, \|x\|_2 \text{ est la norme euclidienne du vecteur } x.$$

On note par R_i pour $i = 1, 2, 3$ la matrice de rigidité de la première, seconde et troisième méthode respectivement. On remarque que la matrice de rigidité est différente suivant la méthode de discrétisation, voir tableau 8.1.

Ensuite, on compare les trois méthodes de discrétisation pour plusieurs valeurs de μ_r . A l'intérieur de la sphère on fait varier μ_r , $\mu_r = 10, 100, 1000$; on étudie le temps de calcul CPU pour les trois méthodes sur la machine SGI Origin 2000.

Les tables 8.2, 8.3 et 8.4 présentent les résultats numériques pour les trois méthodes. Avec la deuxième et la troisième discrétisation, on obtient des bons résultats pour les trois maillages. L'erreur ErrH est environ de 2 %. Tandis que la technique des éléments infinis donne de bons résultats si on raffine le maillage.

En outre, le nombre des itérations de l'algorithme d'Uzawa est le même pour la première et la troisième méthode. Pour la seconde méthode, le nombre des itérations est plus important ce qui requiert un temps CPU plus grand.

8.2.1 Cas des deux sphères

Ce cas test est plus délicat. En effet, la perméabilité n'est pas constante à l'intérieur du domaine de calcul. μ est une fonction constante par morceaux : μ

| μ_r | ErrH (%) | CPU | it | ErrH (%) | CPU | it | ErrH (%) | CPU | it |
|---------|---------------|----------------|-----|-------------|----------------|-----|-------------|------------------|-----|
| 10 | ≈ 2 | ≈ 8 s | 112 | ≈ 2 | ≈ 49 s | 216 | ≈ 1 | ≈ 2992 s | 765 |
| 100 | ≈ 2.7 | ≈ 10 s | 111 | ≈ 2 | ≈ 61 s | 202 | ≈ 1 | ≈ 3768 s | 738 |
| 1000 | ≈ 2.7 | ≈ 11 s | 110 | ≈ 2 | ≈ 67 s | 200 | ≈ 1 | ≈ 4398 s | 733 |

TAB. 8.3 – ErrH avec la méthode intégrale avec S1, S2 et S3.

| μ_r | ErrH (%) | CPU | it | ErrH (%) | CPU | it | ErrH (%) | CPU | it |
|---------|-------------|---------------|----|---------------|----------------|-----|---------------|------------------|-----|
| 10 | ≈ 4 | ≈ 5 s | 70 | ≈ 2.8 | ≈ 31 s | 128 | ≈ 2.7 | ≈ 1775 s | 455 |
| 100 | ≈ 5 | ≈ 6 s | 67 | ≈ 3.6 | ≈ 37 s | 119 | ≈ 2.7 | ≈ 2283 s | 423 |
| 1000 | ≈ 5 | ≈ 7 s | 67 | ≈ 3.7 | ≈ 40 s | 118 | ≈ 2.6 | ≈ 2509 s | 417 |

TAB. 8.4 – ErrH avec la troisième méthode avec S1, S2 et S3.

vaut une constante dans la plus petite sphère et égale à une autre constante dans la couronne. Ainsi le champ magnétique est discontinu à travers la frontière entre les deux sphères. Dans ce cas test, on calcule l'erreur définie par :

$$\|h_{num} - h_a\|_{L^2} = \left[\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} |h_{num} - h_a|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\text{rot } h_{num}\|_{L^2} = \left[\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} |\text{rot } h_{num}|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

où Ω_1 désigne la boule intérieure et Ω_2 est la région délimitée par les deux sphères, ainsi $\Omega_1 \cup \Omega_2$ est le domaine entier du calcul (voir Fig.8.1). Le rayon de Ω_1 est $R = 1$ m et celui de Ω_2 est égale à 10 m. Pour toutes ces méthodes, on a un seul maillage avec 25761 tétraèdres et 960 triangles sur la frontière.

Des résultats numériques sont donnés dans les tables 8.5, 8.6 et 8.7. On remarque que les résultats sont comparables pour les trois méthodes en terme de nombre d'itérations, précision. Cependant la première méthode semble légèrement plus rapide. Nous résumons dans la Table 8.8 les avantages et les inconvénients de chaque méthode.

| μ_r | $\ h_{num} - h_a\ _{L^2}$ | $\ \text{rot } h_{num}\ _{L^2}$ | CPU pour la matrice de rigidité | CPU | it |
|---------|---------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------|------|
| 10 | $\approx 6.10^{-1}$ | $\approx 4.10^{-4}$ | ≈ 1451 s | ≈ 14377 s | 1187 |
| 100 | $\approx 6.10^{-1}$ | $\approx 4.10^{-4}$ | " | ≈ 14598 s | 1196 |
| 1000 | $\approx 6.10^{-1}$ | $\approx 4.10^{-4}$ | " | ≈ 15273 s | 1613 |

TAB. 8.5 – Résultats numériques pour la première méthode

| μ_r | $\ h_{num} - h_a\ _{L^2}$ | $\ \text{rot } h_{num}\ _{L^2}$ | CPU pour la matrice de rigidité | CPU | it |
|---------|-----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------|------|
| 10 | $\approx 1.8 \cdot 10^{-1}$ | $\approx 4 \cdot 10^{-4}$ | ≈ 218 s | ≈ 13360 s | 1187 |
| 100 | $\approx 1.9 \cdot 10^{-1}$ | $\approx 4 \cdot 10^{-4}$ | " | ≈ 13956 s | 1201 |
| 1000 | $\approx 1.9 \cdot 10^{-1}$ | $\approx 4 \cdot 10^{-4}$ | " | ≈ 15995 s | 1613 |

TAB. 8.6 – Résultats numériques pour la deuxième méthode

| μ_r | $\ h_{num} - h_a\ _{L^2}$ | $\ \text{rot } h_{num}\ _{L^2}$ | CPU pour la matrice de rigidité | CPU | it |
|---------|---------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------|------|
| 10 | $\approx 3 \cdot 10^{-1}$ | $\approx 4.2 \cdot 10^{-4}$ | ≈ 201 s | ≈ 12126 s | 1189 |
| 100 | $\approx 3 \cdot 10^{-1}$ | $\approx 4.2 \cdot 10^{-4}$ | " | ≈ 12690 s | 1202 |
| 1000 | $\approx 3 \cdot 10^{-1}$ | $\approx 4.610^{-4}$ | " | ≈ 17093 s | 1603 |

TAB. 8.7 – Résultats numériques pour la troisième méthode

| Première méthode | seconde méthode | troisième méthode |
|---|---|---|
| Le domaine doit être régulier | peu sensible à la forme du domaine | peu sensible à la forme du domaine |
| donne une matrice symétrique et définie positive | donne une matrice symétrique et positive | peut donner une matrice non positive |
| facile à implémenter | difficile à implémenter | intermédiaire |
| dépend de deux paramètres (ζ et l) choisis avec précision | on introduit une variable (q) qui n'est pas discrétisée directement | on introduit une variable (λ) qui n'est pas discrétisée directement |
| moins précise | plus précise | intermédiaire |
| Le temps CPU est peu sensible à μ_r | Le temps CPU est sensible à μ_r | Le temps CPU est sensible à μ_r |

TAB. 8.8 – Commentaires sur les trois discrétisations

Ainsi, on a présenté trois méthodes de discrétisation pour l'opérateur de Poincaré-Steklov. La matrice obtenue à partir de ces méthodes est pleine car cet opérateur est non local. On a comparé les différentes méthodes pour calculer le champ magnétique dans un problème de magnétostatique en dimension 3. Chaque méthode a ses avantages et ses inconvénients, mais aucune ne doit être rejetée.

Troisième partie

La méthode discontinue de Galerkin pour le problème de la magnétostatique

Introduction

En utilisant un potentiel vecteur u , le problème de la magnétostatique peut s'écrire sous la forme : étant donnée une fonction vectorielle j , on cherche une fonction vectorielle u , solution de :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} u = j & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (8.1)$$

et qui satisfait la condition aux limites :

$$n \times u = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (8.2)$$

On cherchera naturellement la solution dans l'espace $H_0(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H(\operatorname{div}^0; \Omega)$. Soit \mathcal{T}_h une partition de Ω , i.e \mathcal{T}_h est une réunion de N_e éléments $K_i, i = 1, \dots, N_e$ soit

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K_i \in \mathcal{T}_h} K_i \text{ et } K_i \cap K_l = \emptyset, i \neq l.$$

La taille d'un élément de \mathcal{T}_h est donnée en fonction de deux paramètres, h_K le diamètre de K et ρ_K le diamètre de la plus grande boule inscrite dans K . On introduit aussi un paramètre qui mesure la finesse de la partition \mathcal{T}_h défini par :

$$\mathbf{h} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K.$$

On a aussi la définition suivante.

Definition 8.2.1 Une famille de partitions $(\mathcal{T}_h)_h$ est régulière s'il existe une constante $C > 0$, indépendante de h et de K , telle que :

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq C, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

On note \mathcal{E}_h l'ensemble de toutes les faces qui résultent de la triangulation \mathcal{T}_h . Il est composé de deux sous ensembles :

$$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_{h,int} \cup \mathcal{E}_{h,D}$$

avec $\mathcal{E}_{h,int}$ qui est l'ensemble des faces internes et $\mathcal{E}_{h,D}$ l'ensemble des faces frontalières. On va introduire deux espaces discontinus :

$$H^2(\mathcal{T}_h)^3 = \{v \in L^2(\Omega), v|_K \in H^2(K)^3, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

et

$$\Sigma_h = \{p \in L^2(\Omega), p|_K \in (P^{p_k}(K))^3 \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Ici, on note $P^{p_k}(K)$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à p_k . Par la suite, on établit des formulations discontinues de Galerkin pour le problème 8.1 en utilisant la méthode décrite dans [18].

Chapitre 9

Formulations discontinues de Galerkin

On va essayer de trouver des formulations faibles des équations (8.1) dans des espaces discontinus en s'inspirant de la méthode décrite dans [33]. Soit u la solution exacte de (8.1). Multiplions la première équation par une fonction v appartenant à $H^2(\mathcal{T}_h)^3$ et intégrons sur le domaine Ω , on obtient :

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot}(\operatorname{rot}u) v \, dx = \int_{\Omega} j v \, dx. \quad (9.1)$$

On va chercher la solution dans l'espace des fonctions de carré sommable. Par conséquent, on écrit l'intégrale comme une somme d'intégrales sur chaque élément K de la triangulation :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{rot}(\operatorname{rot}u) v \, dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K j v \, dx.$$

Intégrons par parties dans chaque élément, ce qui nous donne :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{rot}u \operatorname{rot}v \, dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v \cdot (\operatorname{rot}u \times n) \, ds = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K j v \, dx. \quad (9.2)$$

Maintenant la méthode utilisée consiste à réécrire le terme qui porte sur les bords des éléments de l'équation (9.2) en fonction de toutes les facettes. On obtient facilement :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v \cdot (\operatorname{rot}u \times n) \, ds &= \sum_{f_{il} \in \mathcal{E}_{h,int}} \int_{f_{il}} (v_i \cdot (\operatorname{rot}u \times n)_i + v_l \cdot (\operatorname{rot}u \times n)_l) \, ds \\ &+ \sum_{f \in \mathcal{E}_{h,D}} \int_f v \cdot (\operatorname{rot}u \times n) \, ds \end{aligned}$$

où v_i et v_l désignent les restrictions de v sur l'élément K_i et K_l respectivement et $(\text{rot}u \times n)_i$ et $(\text{rot}u \times n)_l$ représentent la restriction du flux $\text{rot}u \times n$ dans K_i et K_l respectivement.

On simplifie les notations en écrivant pour le terme correspondant aux faces du bord :

$$\sum_{f \in \mathcal{E}_{h,D}} \int_f v \cdot (\text{rot}u \times n) ds = \int_{\mathcal{E}_{h,D}} v \cdot (\text{rot}u \times n) ds.$$

Maintenant, on va traiter les intégrales qui portent sur les faces intérieures au domaine comme suit : étant donnée une face $f_{il} \in \mathcal{E}_{h,int}$ commune à deux éléments K_i et K_l , on remarque tout d'abord que :

$$v_i \cdot (\text{rot}u \times n)_i + v_l \cdot (\text{rot}u \times n)_l = v_i \cdot (\text{rot}u)_i \times n - v_l \cdot (\text{rot}u)_l \times n$$

où n est le vecteur normal à la face f_{il} définie précédemment. On rappelle la formule :

$$2(a \cdot c - b \cdot d) = (a + b) \cdot (c - d) + (a - b) \cdot (c + d)$$

où a, b, c et d sont des vecteurs de \mathbf{R}^3 .

On peut alors écrire :

$$v_i \cdot (\text{rot}u)_i \times n - v_l \cdot (\text{rot}u)_l \times n = \langle v \rangle [v]_T - \langle \text{rot}u \rangle [v]_T.$$

Ici $[v]_T$ et $\langle v \rangle$ représentent respectivement le saut tangential et la moyenne de v à travers une face f_{il} . On va donner la définition des sauts pour une fonction $v \in H^s(K_i)^3 \times H^s(K_l)^3$ avec $s > \frac{1}{2}$. On a si la face f_{il} est une face interne c'est à dire commune à deux éléments K_i et K_l de la triangulation :

$$[v]_T = (v_i - v_l) \times n,$$

$$\langle v \rangle = (v_i + v_l)/2.$$

Le saut normal de v au travers d'une face interne f_{il} est défini par :

$$[v]_N = (v_i - v_l) \cdot n.$$

On prend comme définition de $[v]_T, [v]_N$ et $\langle v \rangle$, pour les faces f sur la frontière de Ω :

$$[v]_T = v \times n, [v]_N = v \cdot n \quad \text{et} \quad \langle v \rangle = v.$$

En utilisant les définitions précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v \cdot (\text{rot}u \times n) ds &= \int_{\mathcal{E}_{h,int}} (\langle v \rangle [v]_T - \langle \text{rot}u \rangle [v]_T) ds \\ &+ \int_{\mathcal{E}_{h,D}} \langle v \rangle [v]_T ds. \end{aligned}$$

Remarque 9.0.1 Comme la solution de (8.1) satisfait $\text{rot } u \in H(\text{rot}, \Omega)$, les flux $\text{rot } u \times n$ sont continus presque partout dans Ω ce qui nous donne :

$$\int_{f_{il}} [\text{rot } u]_T \psi ds = 0 \quad \forall f_{il} \in \mathcal{E}_{h,int}, \quad \forall \psi \in L^2(f_{il})^3. \quad (9.3)$$

Par conséquent, (9.2) peut être réduit à :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \text{rot } u \text{ rot } v \, dx &+ \int_{\mathcal{E}_{h,int}} [v]_T \langle \text{rot } u \rangle ds \\ &- \int_{\mathcal{E}_{h,D}} \langle v \rangle [\text{rot } u]_T ds = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K j \, v \, dx \end{aligned}$$

Comme on a

$$\int_{\mathcal{E}_{h,D}} \langle v \rangle [\text{rot } u]_T ds = - \int_{\mathcal{E}_{h,D}} [v]_T \langle \text{rot } u \rangle ds,$$

l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \text{rot } u \text{ rot } v \, dx &+ \int_{\mathcal{E}_h} [v]_T \langle \text{rot } u \rangle ds \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K j \, v \, dx. \end{aligned}$$

Maintenant, on multiplie la deuxième équation de (8.1) par $\text{div } v$ avec v dans $H^2(\mathcal{T}_h)^3$, et en intégrant dans le domaine Ω , on obtient :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \text{div } u \text{ div } v \, dx = 0.$$

On définit la forme bilinéaire $B(\cdot, \cdot)$ sur $H^2(\mathcal{T}_h)^3 \times H^2(\mathcal{T}_h)^3$ par :

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \text{rot } u \text{ rot } v \, dx + \int_{\Omega} \text{div } u \text{ div } v \, dx$$

et la forme linéaire $F(\cdot)$ par

$$F(v) = \int_{\Omega} j \, v \, dx.$$

On considère aussi la forme bilinéaire $J(\cdot, \cdot)$ sur $H^2(\mathcal{T}_h)^3 \times H^2(\mathcal{T}_h)^3$ qui tient compte de tous les intégrales de frontière sur \mathcal{E}_h définie par :

$$J(u, v) = \int_{\mathcal{E}_h} \langle \text{rot } u \rangle [v]_T ds$$

La formulation faible discontinue du problème de la magnéto-statique est : trouver $u \in H^2(\mathcal{T}_h)^3$ tel que :

$$B(u, v) + J(u, v) = F(v) \text{ pour tout } v \in H^2(\mathcal{T}_h)^3. \quad (9.4)$$

On ne peut pas montrer que cette formulation a une unique solution. En utilisant une méthode de pénalisation, on va établir d'autres formulations discontinues.

9.0.2 Formulations discontinues de Galerkin pénalisées

Les deux formulations qu'on va présenter utilisent les deux remarques suivantes :

- pour $u \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H^2(\mathcal{T}_h)^3$, le saut tangentiel $[u]_T$ s'annule à travers chaque face f_{il} . Ainsi on a

$$\int_{f_{il}} v [u]_T ds = 0 \quad \forall v \in L^2(f_{il}), \quad (9.5)$$

par conséquent :

$$\int_{\mathcal{E}_{h,int}} v [u]_T ds = 0 \quad \forall v \in H^2(\mathcal{T}_h)^3. \quad (9.6)$$

- pour $u \in H(\text{div}, \Omega) \cap H^2(\mathcal{T}_h)^3$, le saut normal $[u]_N$ s'annule à travers chaque face f_{il} . *i.e*

$$\int_{f_{il}} \psi [u]_N ds = 0 \quad \forall \psi \in L^2(f_{il}). \quad (9.7)$$

Par conséquent, on a :

$$\int_{\mathcal{E}_{h,int}} [v]_N [u]_N ds = 0 \quad \forall v \in H^2(\mathcal{T}_h)^3. \quad (9.8)$$

Maintenant, on voit que, pour tout $u \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H^2(\mathcal{T}_h)^3$ et u satisfaisant la condition aux limites (8.2) :

$$J(v, u) = 0 \quad \forall v \in H^2(\mathcal{T}_h)^3. \quad (9.9)$$

On va tout d'abord utiliser la méthode de Galerkin intérieure symétrique pénalisée notée *SIPG* pour transformer le problème (9.4). Cette méthode consiste à rendre symétrique la formulation variationnelle (9.4) et de permettre d'établir une condition de stabilité pour la forme bilinéaire qui correspond au terme de gauche dans l'égalité. Tout d'abord, on rajoute le terme $J(v, u)$ dans (9.4). On obtient alors :

$$B(u, v) + J(u, v) + J(v, u) = F(v) \quad \forall v \in H^2(\mathcal{T}_h)^3. \quad (9.10)$$

Puis, on introduit un terme de pénalisation défini par :

$$J^\sigma(u, v) = \sum_{f_{ii} \in \mathcal{E}_h} \int_{f_{ii}} \sigma[u]_T[v]_T ds + \sum_{f_{ii} \in \mathcal{E}_{h,int}} \int_{f_{ii}} \sigma[u]_N[v]_N ds \quad (9.11)$$

où σ représente un paramètre qu'il faudra fixer.

Alors, la formulation *SIPG* est :
trouver $u \in H^2(\mathcal{T}_h)^3$ tel que :

$$B_+^\sigma(u, v) = F(v) \quad \text{pour tout } v \in H^2(\mathcal{T}_h)^3. \quad (9.12)$$

où

$$B_+^\sigma(u, v) = B(u, v) + J(u, v) + J(v, u) + J^\sigma(u, v). \quad (9.13)$$

Un avantage de cette méthode est que la forme bilinéaire $B_+^\sigma(\cdot, \cdot)$ est symétrique.

La méthode intérieure pénalisée de Galerkin discontinue non symétrique notée *NIPG* consiste à introduire la forme bilinéaire :

$$B_-^\sigma(u, v) = B(u, v) + J(u, v) - J(v, u) + J^\sigma(u, v). \quad (9.14)$$

On considère alors le problème :
trouver $u \in H^2(\mathcal{T}_h)^3$ tel que :

$$B_-^\sigma(u, v) = F(v) \quad \text{pour tout } v \in H^2(\mathcal{T}_h)^3. \quad (9.15)$$

Les deux formulations (9.12) et (9.15) sont très proches; elles diffèrent du signe placé devant le terme $J(v, u)$. Ainsi l'une est symétrique et pas l'autre.

On va montrer que les problèmes (9.12) et (9.15) sont équivalents au problème initial formé des équations (8.1) et (8.2)

9.1 Equivalence entre le problème initial et les formulations *SIPG*, *NIPG* discontinues de Galerkin

On établit le résultat suivant :

Théorème 9.1.1 *Soit u la solution exacte du problème fort (8.1) et (8.2), alors u satisfait les problèmes faibles (9.12) et (9.15). Réciproquement, si u est solution de (9.12) ou (9.15) et si $u \in H(\text{rot}; \Omega) \cap H(\text{div}; \Omega)$ alors u vérifie les équations (8.1). et (8.2)*

Preuve. Si u est solution du problème fort, alors $u \in H(\text{rot}; \Omega) \cap H(\text{div}; \Omega)$ donc $[u]_N = [u]_T = 0$. De plus on a $\text{rot } u \in H(\text{rot}; \Omega)$ donc $[\text{rot } u]_T = 0$ et par conséquent, les formulations (9.12) et (9.15) se réduisent après une intégration par parties à

$$\int_{\Omega} \text{rot } \text{rot } u v \, dx + \int_{\Omega} \text{div } u \text{div } v = \int_{\Omega} j v \, dx.$$

Réciproquement, faisons la démonstration pour la formulation *SIPG*. Elle est identique pour la formulation *NIPG*. Soit u solution de (9.12) et montrons qu'elle vérifie (8.1) et (8.2)

Soit $\mathcal{D}(K)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans K . Commençons par montrer que $\text{div } u = 0$ dans K un éléments de \mathcal{T}_h . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Considérons $\psi \in H_0^1(K)$ vérifiant $\Delta \psi = \varphi$ dans K . Comme $\varphi \in H^1(K)$ on en déduit que si ∂K est suffisamment régulier, $\psi \in H^3(K)$. En particulier, $\nabla \psi \in H^2(K) \cap H_0(\text{rot}^0; K)$. Posons $v = \nabla \psi$ dans K prolongé par 0 dans Ω on a :

$$\int_K \text{div } u \text{div } \nabla \psi \, dx = \int_K \text{div } u \varphi \, dx = \int_K j \nabla \psi \, dx. \quad (9.16)$$

En particulier comme $\text{div } j = 0$, on a :

$$\int_K \text{div } u \varphi \, dx = 0.$$

Par densité, on a $\text{div } u = 0$ p.p. dans K . Donc comme $u \in H(\text{div}; \Omega)$, on obtient :

$$\text{div } u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Soit $v \in D(K)^3$, on a en remarquant que $J(u, v)$, $J(v, u)$ et $J^\sigma(u, v)$ disparaissent :

$$\int_K \text{rot } u \text{rot } v = \int_K j v \, dx. \quad (9.17)$$

Il résulte après une intégration par parties que u vérifie

$$\text{rot } \text{rot } u = j \text{ p.p. sur } K. \quad (9.18)$$

Soit maintenant f_{il} une face interne, et soit $v \in H_0^2(K_i \cup K_l)^3$ vérifiant :

$$\int_{K_i \cup K_l} \text{rot } u \text{rot } v = \int_{K_i \cup K_l} j v \, dx. \quad (9.19)$$

En intégrant par parties sur K_i et K_l séparément, on a :

$$\int_{K_i} \text{rot } u \text{rot } v + \int_{f_{il}} (n \times \text{rot } u) v = \int_{K_i} j v \, dx, \quad (9.20)$$

$$\int_{K_l} \text{rot } u \text{ rot } v - \int_{f_{iu}} (n \times \text{rot } u) v = \int_{K_l} j v dx. \quad (9.21)$$

On a alors :

$$\int_{f_{iu}} v [\text{rot } u]_T ds = 0.$$

Ce qui implique que $[\text{rot } u]_T = 0$. Ainsi on a bien

$$\text{rot rot } u = j \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (9.22)$$

On obtient ainsi que $\text{rot } u \in H(\text{rot}; \Omega)$. Par conséquent u vérifie (8.1) presque partout dans Ω . Pour retrouver la condition aux limites $n \times u = 0$ sur Γ , on considère $v \in H^2(\Omega)^3$ avec $n \times v = 0$, alors 9.12 se réduit à

$$\int_{\Omega} \text{rot } u \text{ rot } v + \int_{\Gamma} [u]_T \langle \text{rot } v \rangle = \int_{\Omega} j v \quad (9.23)$$

En multipliant (9.22) par v et en intégrant par parties, on se ramène à

$$\int_{\Omega} \text{rot } u \text{ rot } v = \int_{\Omega} j v. \quad (9.24)$$

Soit par soustraction, on aura

$$\int_{\Gamma} [u]_T \langle \text{rot } v \rangle = 0 \quad \forall v \in H^2(\Omega)^3 \quad \text{avec } n \times v = 0 \quad (9.25)$$

et la démonstration est achevée. \square

9.2 Etablissement de la continuité des formes bilinéaires

On définit une norme dépendante du maillage. Pour $v \in H^2(\mathcal{T}_h)^3$, on pose :

$$\|u\|_h^2 = \|u\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{rot } u\|_{0,\Omega}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \langle \text{rot } u \rangle \right\|_{0,\mathcal{E}_h}^2 +$$

$$\|\text{div } u\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\sigma}[u]_N\|_{0,\mathcal{E}_{h,int}}^2 + \|\sqrt{\sigma}[u]_T\|_{0,\mathcal{E}_h}^2$$

On va montrer que les formes bilinéaires $B_{\pm}^{\sigma}(\cdot, \cdot)$ sont continues sur $H^2(\mathcal{T}_h)^3 \times H^2(\mathcal{T}_h)^3$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_h$.

On a le théorème suivant :

Théorème 9.2.1 Soit $B_{\pm}^{\sigma}(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire définie soit dans (9.12) ou dans (9.15). Alors, on a :

$$|B_{\pm}^{\sigma}(u, v)| \leq C \|u\|_h \|v\|_h \quad \forall u, v \in H^2(\mathcal{T}_h)^3. \quad (9.26)$$

où C est une constante indépendante de h .

Preuve. Tout d'abord, on remarque que

$$\begin{aligned} |B_{\pm}^{\sigma}(u, v)| &= |B(u, v) - J(u, v) \pm J(v, u) + J^{\sigma}(u, v)| \\ &\leq |B(u, v)| + |J(v, u)| + |J(u, v)| + |J^{\sigma}(u, v)| \end{aligned}$$

Il est clair que :

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} (\text{rot} u \text{rot} v + \text{div} u \text{div} v) \right| \\ &\leq \|\text{rot} u\|_{0,\Omega} \|\text{rot} v\|_{0,\Omega} + \|\text{div} u\|_{0,\Omega} \|\text{div} v\|_{0,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} |J(u, v)| &= \left| \int_{\mathcal{E}_h} \langle \text{rot} u \rangle [v]_T ds \right| \\ &\leq \sqrt{\|\sqrt{\sigma}[v]_T\|_{0,\mathcal{E}_h}^2} \times \sqrt{\left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \langle \text{rot} u \rangle \right\|_{0,\mathcal{E}_h}^2} \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} |J(v, u)| &= \left| \int_{\mathcal{E}_h} \langle \text{rot} v \rangle [u]_T ds \right| \\ &\leq \sqrt{\|\sqrt{\sigma}[u]_T\|_{0,\mathcal{E}_h}^2} \times \sqrt{\left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \langle \text{rot} v \rangle \right\|_{0,\mathcal{E}_h}^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |J^{\sigma}(u, v)| &= \left| \int_{\mathcal{E}_h, \text{int}} \sigma [u]_N [v]_N ds + \int_{\mathcal{E}_h} \sigma [u]_T [v]_T ds \right| \\ &\leq \|\sqrt{\sigma}[u]_N\|_{0,\mathcal{E}_h, \text{int}} \|\sqrt{\sigma}[v]_N\|_{0,\mathcal{E}_h, \text{int}} + \|\sqrt{\sigma}[u]_T\|_{0,\mathcal{E}_h} \|\sqrt{\sigma}[v]_T\|_{0,\mathcal{E}_h}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} |B_{\pm}^{\sigma}(u, v)| &\leq \|\text{rot} u\|_{0,\Omega} \|\text{rot} v\|_{0,\Omega} + \|\text{div} u\|_{0,\Omega} \|\text{div} v\|_{0,\Omega} \\ &\quad + \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \\ &\quad + \sqrt{\|\sqrt{\sigma}[v]_T\|_{0,\mathcal{E}_h}^2} \times \sqrt{\left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \langle \text{rot} u \rangle \right\|_{0,\mathcal{E}_h}^2} \\ &\quad + \sqrt{\|\sqrt{\sigma}[u]_T\|_{0,\mathcal{E}_h}^2} \times \sqrt{\left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \langle \text{rot} v \rangle \right\|_{0,\mathcal{E}_h}^2} \\ &\quad + \|\sqrt{\sigma}[u]_N\|_{0,\mathcal{E}_h, \text{int}} \|\sqrt{\sigma}[v]_N\|_{0,\mathcal{E}_h, \text{int}} + \|\sqrt{\sigma}[u]_T\|_{0,\mathcal{E}_h} \|\sqrt{\sigma}[v]_T\|_{0,\mathcal{E}_h}. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant l'inégalité discrète de Schwarz, on obtient :

$$|B_{\pm}^{\sigma}(u, v)| \leq C \|u\|_h \|v\|_h.$$

□

9.3 Coercivité des formes bilinéaires

On va montrer que les formes bilinéaires $B_{\pm}^{\sigma}(\cdot, \cdot)$ sont coercives sur Σ_h relativement à la norme $\|\cdot\|_h$ afin d'appliquer le théorème de Lax-Milgram pour montrer l'existence et l'unicité de la solution. Ce résultat de coercivité va être obtenu sur l'espace de dimension fini Σ_h et non sur l'espace $H^2(\mathcal{T}_h)^3$.

Théorème 9.3.1 *Soit $\sigma = \kappa p^2/\mathbf{h}$, κ est un nombre positif et $p = \inf_K p_K$. Alors pour tout $\kappa > 0$, il existe une constante positive, $\alpha > 0$, telle que :*

$$B_{-}^{\sigma}(v, v) \geq \alpha \|v\|_h^2 \quad \forall v \in \Sigma_h. \tag{9.27}$$

Ici α est indépendante de \mathbf{h} et p .

Preuve. Soit α un nombre réel et $v \in \Sigma_h$. Alors, on a :

$$B_{-}^{\sigma}(v, v) - \alpha \|v\|_h^2 = (1 - \alpha)B(v, v) + (1 - \alpha)J^{\sigma}(v, v) - \alpha \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \langle \text{rot } v \rangle \right\|_{0, \mathcal{E}_h}^2.$$

On peut écrire :

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \langle \text{rot } v \rangle \right\|_{0, \mathcal{E}_h}^2 = \sum_{f_{il} \in \mathcal{E}_{h, \text{int}}} \int_{f_{il}} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{(\text{rot } v)_i + (\text{rot } v)_l}{2} \right)^2 ds + \sum_{f \in \mathcal{E}_{h, D}} \int_f \frac{1}{\sigma} (\text{rot } v)^2 ds.$$

Soit $f \in \mathcal{E}_h$, en utilisant l'inégalité inverse, on a :

$$\int_f (\text{rot } v)^2 / \sigma ds = \frac{1}{\sigma} \|\text{rot } v\|_{0, f}^2 \leq \frac{C_{inv}}{\sigma} \frac{p_K^2}{h_K} \|\text{rot } v\|_{0, K}^2. \tag{9.28}$$

Si on choisit σ égale à $\kappa p^2/\mathbf{h}$ dans (9.28), on obtient :

$$- \int_f (\text{rot } v)^2 / \sigma ds \geq - \frac{C_{inv}}{\kappa} \|\text{rot } v\|_{0, K}^2.$$

Notons que, lorsque la taille de maille h_{K_i} et h_{K_l} et les degrés des polynômes p_{K_i} et p_{K_l} sont différents dans les deux éléments K_i et K_l dont la face f_{il} est commune, on définit σ par :

$$\sigma = \kappa \frac{\max(p_{K_i}^2, p_{K_l}^2)}{\min(h_{K_i}, h_{K_l})}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{f_{ii}} (\operatorname{rot} v)^2 / \sigma ds &\leq \frac{C_{inv} p_{K_i}^2}{\sigma h_{K_i}} \|\operatorname{rot} v\|_{0, K_i}^2 \\ &\leq \frac{C_{inv} \min(h_{K_i}, h_{K_l}) p_{K_i}^2}{\kappa \max(p_{K_i}^2, p_{K_l}^2) h_{K_i}} \|\operatorname{rot} v\|_{0, K_i}^2 \\ &\leq \frac{C_{inv}}{\kappa} \|\operatorname{rot} v\|_{0, K_i}^2. \end{aligned}$$

En particulier, on obtient en utilisant les inégalités précédentes et l'inégalité $(\frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{E_h} \langle \operatorname{rot} v \rangle^2 / \sigma ds &\leq \frac{C_{inv}}{\kappa} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\operatorname{rot} v\|_{0, K_i}^2 \\ &\leq \frac{C_{inv}}{\kappa} B(v, v) \end{aligned}$$

Il en découle que :

$$B_-^\sigma(v, v) - \alpha \|v\|_h^2 \geq (1 - \alpha - \alpha \frac{C_{inv}}{\kappa}) B(v, v) + (1 - \alpha) J^\sigma(v, v).$$

Alors, on peut prendre la valeur α vérifiant :

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{1 + \frac{C_{inv}}{\kappa}}.$$

pour laquelle la forme bilinéaire $B_-^\sigma(\cdot, \cdot)$ est coercive dans Σ_h , pour tout $\kappa > 0$. \square

Théorème 9.3.2 Soit $\sigma = \kappa p^2 / \mathbf{h}$ où κ est un nombre positif. Alors, pour tout $\kappa > \kappa_0$, il existe une constante positive α indépendante de \mathbf{h} et p . telle que :

$$B_+^\sigma(v, v) \geq \alpha \|v\|_h^2 \quad \forall v \in \Sigma_h. \quad (9.29)$$

Preuve. Soit α un nombre réel arbitraire et choisissons $v \in \Sigma_h$. Alors

$$B_+^\sigma(v, v) - \alpha \|v\|_h^2 = B_-^\sigma(v, v) - \alpha \|v\|_h^2 - 2J(v, v)$$

où

$$2J(v, v) = -2 \int_{E_h} \langle \operatorname{rot} v \rangle [v]_T ds.$$

Pour tout nombre positif ϵ et pour chaque $f \in \mathcal{E}_h$, on a :

$$\begin{aligned} -2 \int_f \langle \operatorname{rot} v \rangle [v]_T ds &\leq \sqrt{\int_f \langle \operatorname{rot} v \rangle^2 / \sigma ds} \sqrt{\int_f \sigma [v]_T^2 ds} \\ &\leq \epsilon \int_f \langle \operatorname{rot} v \rangle^2 / \sigma ds + \frac{1}{\epsilon} \int_f \sigma [v]_T^2 ds, \end{aligned}$$

ce qui donne, en utilisant la même méthode de la preuve du résultat précédente :

$$B_+^\sigma(v, v) - \alpha \|v\|_h^2 \geq (1 - \alpha - (\alpha + \epsilon) \frac{C_{inv}}{\kappa}) B(v, v) + (1 - \alpha - \frac{1}{\epsilon}) J^\sigma(v, v).$$

Afin de démontrer la coercivité, on veut trouver $\alpha > 0$ tel que :

$$1 - \alpha - \frac{(\alpha + \epsilon) C_{inv}}{\kappa} \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 - \alpha - \frac{1}{\epsilon} \geq 0.$$

La deuxième inégalité implique que :

$$0 < \alpha \leq 1 - \frac{1}{\epsilon}$$

ce qui signifie $\epsilon > 1$.

D'autre part la première inégalité implique :

$$0 < \alpha \leq \frac{1 - \epsilon C_{inv}/\kappa}{1 + C_{inv}/\kappa} \leq \frac{1 - C_{inv}/\kappa}{1 + C_{inv}/\kappa} \leq \frac{\kappa - C_{inv}}{\kappa + C_{inv}}.$$

Ceci termine la démonstration en prenant κ assez large, notamment $\kappa \geq \kappa_0$ \square

9.4 Existence et unicité de la solution

En utilisant une méthode d'éléments finis, les problèmes approchés de (9.12) et (9.15) sont : trouver $u \in \Sigma_h$ tel que

$$B_+^\sigma(u, v) = F(v) \quad \text{pour tout } v \in \Sigma_h. \quad (9.30)$$

et trouver $u \in \Sigma_h$ tel que

$$B_-^\sigma(u, v) = F(v) \quad \text{pour tout } v \in \Sigma_h. \quad (9.31)$$

On obtient le résultat suivant.

Théorème 9.4.1 *Les formulations discontinues de Galerkin (9.30) et (9.31) sont bien posées.*

Preuve. l'existence équivaut à l'unicité qui se déduit en utilisant le théorème de Lax-Milgram. \square

9.5 Estimation de l'erreur

On a le résultat suivant :

Proposition 9.5.1 *Soit u la solution exacte du problème fort et soit u_h la solution de la formulation (9.30) ou (9.31). Si $u \in H^{s_K+1}(K)^3$, avec $s_K \geq 1$, alors on a :*

$$\|u - u_h\|_h^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^{2\min(p_K, s_K)}}{p_K^{2s_K-1}} \|u\|_{s_K+1, K}^2.$$

Preuve. Soit z_p un interpolant de u dans $H^2(\mathcal{T}_h)^3$, on note $\xi = u - z_p$, $\psi = u_h - z_p$ et $e = u - u_h = \xi - \psi$,

Avec l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|e\|_h \leq \|\xi\|_h + \|\psi\|_h$$

En utilisant la coercivité des formes bilinéaires B_{\pm}^{σ} , on en déduit que :

$$\|\psi\|_h^2 \leq C B_{\pm}^{\sigma}(\psi, \psi)$$

En utilisant une relation d'orthogonalité et la continuité de la forme bilinéaire, on a

$$\begin{aligned} B_{\pm}^{\sigma}(\xi, \xi) &= B_{\pm}^{\sigma}(\xi, \psi) \\ &\leq C \|\xi\|_h \|\psi\|_h. \end{aligned}$$

D'où

$$\|\psi\|_h \leq C \|\xi\|_h.$$

En particulier, on a :

$$\|e\|_h \leq C \|\xi\|_h.$$

On va utiliser la proposition suivante :

Proposition 9.5.2 *Soit $K \in \mathcal{T}_h$ et on suppose que $u \in H^{t_K}(K)$, $t_K \geq 0$. Alors il existe une suite de polynômes $\pi_{p_K}^{h_K} \in P_{p_K}(K)$, $p_K = 1, 2, \dots$, vérifiant :*

$$\|u - \pi_{p_K}^{h_K}(u)\|_{q, K} \leq C \frac{h_K^{\min(p_K+1, t_K)-q}}{p_K^{t_K-q}} \|u\|_{t_K, K} \quad \forall 0 \leq q \leq t_K.$$

Si de plus $t_K \geq 1$, alors on a :

$$\|u - \pi_{p_K}^{h_K}(u)\|_{0, \partial K} \leq C \frac{h_K^{\min(p_K+1, t_K)-\frac{1}{2}}}{p_K^{t_K-\frac{1}{2}}} \|u\|_{t_K, K}.$$

La constante C est indépendante de u , h_K , p_K , de la constante de régularité de maillage et de $t = \max_{K \in \mathcal{T}_h} t_K$.

On note par Π_p^h l'opérateur défini par $\Pi_p^h(u)|_K = \pi_{p_K}^{h_K}(u|_K)$, pour tout élément $K \in \mathcal{T}_h$ avec $\pi_{p_K}^{h_K}$ la suite de polynômes donnée par la proposition précédente. On définit aussi $\mathbf{\Pi}_p^h(u) = (\Pi_p^h(u_1), \Pi_p^h(u_2), \Pi_p^h(u_3))$ si $u = (u_1, u_2, u_3)$. En remarquant que $\|e\|_h^2 \leq C\|u - \Pi_p^h(u)\|_h^2$, il suffit d'estimer $\|u - \Pi_p^h(u)\|_h^2$. On estime maintenant $\|u - \Pi_p^h(u)\|_h$ terme par terme.

En utilisant la proposition 9.5.2 avec $t_K = s_K + 1, q = 0$, il existe une constante C indépendante de h tel que :

$$\begin{aligned} \|u - \mathbf{\Pi}_p^h(u)\|_{0,\Omega}^2 &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \pi_{p_K}^{h_K}\|_{0,K}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^{2\min(p_K, s_K)+2}}{p_K^{2s_K+2}} \|u\|_{s_K+1,K}^2. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 9.5.2 avec $t_K = s_K + 1, q = 1$, il existe des constantes C indépendantes de h tel que :

$$\|\text{rot}_h(u - \mathbf{\Pi}_p^h(u))\|_{0,\Omega}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^{2\min(p_K, s_K)}}{p_K^{2s_K}} \|u\|_{s_K+1,K}^2$$

et

$$\|\text{div}_h(u - \mathbf{\Pi}_p^h(u))\|_{0,\Omega}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^{2\min(p_K, s_K)}}{p_K^{2s_K}} \|u\|_{s_K+1,K}^2.$$

En utilisant la définition de σ , la deuxième inégalité de la proposition 9.5.2 avec $t_K = s_K + 1$, il existe des constantes C indépendantes de h tel que :

$$\|\sqrt{\sigma}[u - \mathbf{\Pi}_p^h(u)]_T\|_{0,F_h}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^{2\min(p_K, s_K)}}{p_K^{2s_K-1}} \|u\|_{s_K+1,K}^2$$

et

$$\|\sqrt{\sigma}[u - \mathbf{\Pi}_p^h(u)]_N\|_{0,F_h^I}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^{2\min(p_K, s_K)}}{p_K^{2s_K-1}} \|u\|_{s_K+1,K}^2.$$

Il reste à estimer $\|\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\{\text{rot}_h(u - \mathbf{\Pi}_p^h(u))\}\|_{0,F_h}^2$. Notons d'abord l'inégalité suivante, [34] :

$$\|v\|_{0,\partial K}^2 \leq C \left(\frac{1}{h_K} \|v\|_{0,K}^2 + \|v\|_{0,K} \|\nabla v\|_{0,K} \right) \quad \forall v \in H^1(K).$$

En utilisant l'inégalité précédente, la définition de σ et la proposition 9.5.2, on déduit qu'il existe une constante C indépendante de h tel que :

$$\|\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\{\text{rot}_h(u - \mathbf{\Pi}_p^h(u))\}\|_{0,F_h}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^{2\min(p_K, s_K)}}{p_K^{2s_K+2}} \|u\|_{s_K+1,K}^2.$$

L'estimation d'erreur se déduit facilement des estimations précédentes. □

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, on a établi différentes formulations mixtes hybrides de la magnétostatique en couplant une méthode d'éléments finis avec une méthode intégrale de frontière. A chaque fois, soit le champ magnétique, soit l'induction magnétique était l'inconnue principale. Pour étudier ces formulations variationnelles, on a établi une condition de coercivité et une condition inf-sup pour les problèmes continus et discrets. Dans une deuxième partie, on s'est intéressé à la discrétisation de l'opérateur de Poincaré Steklov car elle reste essentielle ce que souvent on néglige dans ce type de problème mixte. Dans une dernière partie, on a exposé plusieurs formulations discontinues de Galerkin pénalisées pour le problème de la magnétostatique, avec des conditions aux limites. Une étude complète des formulations est proposée.

Dans l'avenir, le problème intéressant serait l'étude d'un couplage méthode DG avec une méthode d'éléments finis et une méthode intégrale de frontière pour résoudre le problème de la magnétostatique dans \mathbf{R}^3 .

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| I | Etablissement de formulations pour le problème de la magnétostatique | 5 |
| 1 | Modèle physique et cadre fonctionnel | 9 |
| 1.1 | Le modèle de la magnétostatique | 9 |
| 1.2 | Notations et cadre fonctionnel | 10 |
| 1.3 | Les opérateurs surfaciques | 12 |
| 1.4 | Potentiels et équations de Calderon | 13 |
| 1.5 | Méthodes mixtes | 15 |
| 1.5.1 | Approximation de problème de point selle | 15 |
| 1.5.2 | Approximation du problème | 16 |
| 2 | Formulation en champ magnétique | 19 |
| 2.1 | Formulation sur \mathbf{R}^3 | 19 |
| 2.2 | Etude du problème (B) | 21 |
| 2.3 | Formulation sur $\overline{\Omega}$ | 23 |
| 2.4 | Etude du problème (C) | 25 |
| 3 | Formulation en induction magnétique | 27 |
| 3.1 | Formulation sur \mathbf{R}^3 | 27 |
| 3.2 | Formulation sur $\overline{\Omega}$ | 29 |
| 3.3 | Etude du problème (E) | 31 |
| 4 | Deuxième formulation en induction magnétique | 33 |
| 4.1 | Problème extérieur | 33 |
| 4.2 | Calcul des traces | 34 |
| 4.3 | Formulation sur $\overline{\Omega}$ | 36 |
| 5 | Etude de formulations discrètes | 39 |
| 5.1 | Rappel sur les éléments finis | 39 |
| 5.1.1 | Élément fini de Raviart-Thomas | 40 |
| 5.1.2 | Élément fini d'arête de Nédélec | 41 |
| 5.2 | Espaces d'approximation | 41 |

| | | |
|--|--|-----------|
| 5.3 | Approximation du problème (C) | 44 |
| 5.3.1 | Approximation du problème (E) | 46 |
| 5.4 | Approximation du problème (F) | 49 |
| 6 | Résultats numériques | 51 |
| 6.1 | Implémentation | 51 |
| II Comparaison entre diverses méthodes de discrétisation de l'opérateur de Poincaré-Steklov | | 55 |
| 7 | Opérateur de Poincaré-Steklov | 59 |
| 7.1 | Notations et espaces | 59 |
| 7.2 | Application de l'opérateur de Poincaré-Steklov pour un problème de la magnétostatique | 60 |
| 7.3 | Description des méthodes de discrétisation | 61 |
| 7.3.1 | la méthode des éléments infinis | 61 |
| 7.3.2 | La méthode des équations intégrales | 63 |
| 7.3.3 | La méthode des équations de Calderon | 66 |
| 7.4 | Exemple : un problème de la magnétostatique | 68 |
| 8 | Tests numériques | 69 |
| 8.1 | Cas d'une seule sphère | 70 |
| 8.1.1 | Optimization de l et ζ | 70 |
| 8.2 | Comparaison entre les trois méthodes de discrétisation | 73 |
| 8.2.1 | Cas des deux sphères | 75 |
| III La méthode discontinue de Galerkin pour le problème de la magnétostatique | | 79 |
| 9 | Formulations discontinues de Galerkin | 83 |
| 9.0.2 | Formulations discontinues de Galerkin pénalisées | 86 |
| 9.1 | Equivalence entre le problème initial et les formulations $SIPG$, $NIPG$ discontinues de Galerkin | 87 |
| 9.2 | Etablissement de la continuité des formes bilinéaires | 89 |
| 9.3 | Coercivité des formes bilinéaires | 91 |
| 9.4 | Existence et unicité de la solution | 93 |
| 9.5 | Estimation de l'erreur | 94 |

Bibliographie

- [1] B. BANDELIER, C. DAVEAU, J. LAMINIE, S. M. MEFIRE, F. RIOUX-DAMIDAU, Three-Dimensional Magnetostatic Problem , *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol 45, 1999.
- [2] B. BANDELIER, C. DAVEAU, F. RIOUX-DAMIDAU, Several Techniques For Magnetostatic Problem , *IEEE Trans. Magn.* 35, pp 1175-1178, 1999.
- [3] A. BOSSAVIT, Electromagnétisme, en vue de la modélisation, *Springer-Verlag, New-York*, 1991.
- [4] A. BOSSAVIT, Computational Electromagnetism, Variational Formulations, Complementary, Edge Elements, *Academic Press*, 1998.
- [5] A. BOSSAVIT, Mixed Methods and the Marriage Between “Mixed” Finite Elements and Boundary Elements , *Num. Meth. Partial Diff. Equ.*, vol 7, pp 347-362, 1991
- [6] A. BENDALI, Numerical analysis of the exterior boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations by boundary finite element method, I and II, *Math. Comp.* 43, No 167, 1984.
- [7] F. BREZZI, M. FORTIN, Mixed and Hybrid Finite Element Methods , *Springer, New-York*, 1991.
- [8] A. BUFFA, M. COSTABEL, D. SHEEN, On traces for $H(\text{rot}; \Omega)$ in Lipschitz domains , *Preprint IAN-CNR 1185, University of Pavia*, 2000.
- [9] C. CARTENSEN, Interface problem in holonomic elastoplastic, *Math. Meth. Appl. Sci.* 16, pp 819-835, 1993.
- [10] M. CESSENAT, Exemples en électromagnétisme et en physique quantique, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Ed. par R. Dautray et J.L. Lions, Masson, vol 5, chap IX, pp 235-273, 1988.
- [11] P. CASTILLO, B. COCKBURN, D. SHOTZAU, C. SCHWAB, L. PERUGIA, An a priori error estimates for the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 38, pp 1676-1706, 2000.
- [12] P. CHAUSSECOURTE, C. CHAVANT, Discretization of the Poincaré-Steklov operator in the Trifou code and condition number of the outer stiffness matrix, *Notes internes, EDF*.

- [13] M. COSTABEL, Boundary integral operators on Lipschitz domains : Elementary results , *SIAM J. Math. Anal.*, 19, pp 613-626, 1988.
- [14] M. COSTABEL, E.P.STEPHAN, Coupling of finite and boundary element method for an elastoplastic interface problem, *SIAM J. Numer. Anal.* 27, (5) , pp 1212-1226, 1990.
- [15] C. DAVEAU, M. MENAD, Mixed FEM and BEM Coupling for the Three Dimensional Magnetostatic Problem, *Num. Math. Part. Diff. Equ.*, pp 443-462, 2003.
- [16] C. DAVEAU, J. LAMINIE, Mixed and Hybrid Formulations for the Three-Dimensional Magnetostatic problem, *Num. Meth. Part. Diff. Equ*, pp 85-104, 2002.
- [17] C. DAVEAU, Numerical Analysis of a mixed formulation for the linear magnetostatic problem, *Revue Européenne des éléments finis*, vol 9, no 5, pp 611-620, 2000.
- [18] N. ARNOLD DOUGLAS, An Interior Penalty Finite Element Method with Discontinuous Elements, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol 19, No 4, pp 742-760, 1982.
- [19] A. DOUGLAS, N. ARNOLD, F. BREZZI, B. COCKBURN, L. DONATELLA MARINI, Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 39, 2002.
- [20] F. DUBOIS, Discrete vector potential representation of a divergence free vector field in three-dimensional domains : numerical analysis of a model problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, 27, pp 1103-1141, 1990.
- [21] E. DURAND, Magnétostatique, *Masson, Paris, Dunod*, 1968.
- [22] V. GIRAULT, P. A. RAVIART, Finite element methods for Navier-Stokes equations, *Volume 5 de Springer Series in Computational Mathematics*, Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [23] G. HSIAO, J.F. PORTER, The coupling of BEM and FEM for the two-dimensional viscous flow problem, *Applicable Analysis* 27 , pp 79-108, 1988.
- [24] C. JOHNSON, J.C. NÉDÉLEC, On the coupling of boundary integral and finite element methods, *Math. Comp.*, 35, pp 1063-1079, 1980.
- [25] F. KIKUCHI, Mixed formulation for finite element analysis of magnetostatic and electrostatic problems, *Appl. Math. Japan*, 6, pp 209-221, 1989.
- [26] V. LEVILLAIN, Couplage éléments-finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène, *Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique*, 1991.
- [27] M. MENAD, C. DAVEAU, Comparison of several discretisation methods of the Steklov-Poincaré operator, *soumis à Int. J. of Modelling*.

- [28] T. NAKATA ET K. FUJIWARA, Summary on results for Benchmark problem 13 D non-linear magnetostatic model, *COMPEL*, 11, pp 345-369, 1992.
- [29] J. C. NÉDÉLEC, J. PLANCHARD, Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans \mathbf{R}^3 , *RAIRO R3* 7, pp 105-129, 1973.
- [30] J. C. NÉDÉLEC, Mixed finite elements in \mathbf{R}^3 , *Numer. Math.*, Vol. 35, pp 315-345, 1980.
- [31] J. C. NÉDÉLEC, A New Family of Mixed finite elements in \mathbf{R}^3 , *Numer. Math.*, Vol. 50, pp 57-80, 1986.
- [32] I. PERUGIA, D. SCHOTZAU, The hp-local discontinuous Galerkin method for low-frequency time-harmonic Maxwell equation, *Math. Comp.*, 72, pp 1179-1214, 2003.
- [33] I. PERUGIA, P. HOUSTON, D. SCHOTZAU, Mixed Discontinuous Galerkin Approximation of The Maxwell Operator , *va paraitre dans SIAM J. Num. Anal.*, 2005.
- [34] S. PRUDHOMME, F. PASCALE, J.T. ODEN, A. ROMKES, Review of a priori estimation for discontinuous Galerkin method, *Tech. report 2000-27, TICAM, University of Texas at Austin*, 2000.
- [35] RAVIART, P.A., THOMAS, J.M., A mixed finite element method for second elliptic problems, *Mathematical Aspects of Finite Element Methods (I. Galligani and E. Magenes, Eds.)*, *Lecture Notes in Mathematics 606*, 292-315, Springer, Berlin, 1977.
- [36] BREZZI, F. RAVIART, P.A. Mixed finite element for fourth order elliptic equations, *Topics in Numerical Analysis III*, (J.J.H. Miller, Ed.), pp 35-56, 1977.
- [37] SCHOLTZ, R. A mixed method for fourth problems using linear elements, *RAIRO Anal. Numer.*, 12, pp 85-90, 1978.
- [38] I.H. SLOAN, A. SPENCE, The Galerkin Method for integral Equations of the first kind with Logarithmic Kernel, Theory, *IMA J. Numer. Anal.*, 8 pp 105-122, 1988.
- [39] P. P. SYLVESTER, D. A. LOWTHER, C. J. CARPENTIER, Exterior finite elements for 2-dimensional field problems with open boundaries , *Proc., IEE*, Vol. 124, No 12, pp 1267-1270, 1977.
- [40] LUNG AN YING, Infinite Element Methods, *Peking University Press, Vieweg Publishing*, 1995.

Résumé

L'objet de cette thèse est d'étudier un problème de la magnétostatique tridimensionnel. On propose trois formulations mixtes couplant une méthode d'éléments finis pour tenir compte du milieu hétérogène et une méthode éléments de frontière pour le milieu extérieur homogène. Pour la méthode intégrale on a utilisé les équations de Calderon, l'opérateur de Neumann-Dirichlet ou d'autres opérateurs intégraux. L'utilisation des éléments d'arête de Nédélec pour le champ magnétique, et les éléments de face de Raviart pour l'induction magnétique permet d'utiliser des méthodes éléments finis conformes. Des résultats numériques ont permis de valider ces méthodes. La deuxième partie a porté sur la comparaison de diverses discrétisations pour l'opérateur de Poincaré-Steklov. Ces méthodes ont été comparées sur une formulation de la magnétostatique. Enfin, on propose des formulations discontinues du problème de la magnétostatique avec des conditions aux limites. On montre que ces formulations sont consistantes et des estimations d'erreur sont obtenues.

Abstract

The subject of this thesis is the study of the three-dimensional magnetostatic problem. We present three mixte formulations obtained by coupling a finite element method to take account the heterogeneous domain with a boundary integral method to take account the homogeneous exterior domain. In the integral approach, we used either Calderon equations or Neumann-Dirichlet operator or other integral operators. The finite element method is conform, the magnetic field is discretized with Nédélec finite elements and magnetic induction by Raviart-Thomas finite elements. Numerical results are given to validate these formulations. The second part is about several discretizations methods for the Poincaré-Steklov operator. We consider a mixte formulation for the three-dimensional magnetostatic problem obtained by coupling a finite element method with a boundary integral method which uses the Poincaré-Steklov operator. Numerical results are given to compare these methods in term of precision and performance. In the last part, we present several discontinuous formulation for a magnetostatic problem with boundary conditions. An hp-analysis is carried out and error estimates are obtained.