

# Université de Cergy-Pontoise

## THESE

Discipline : Génie civil

Présentée par :

**Salima HASSANI-MANAI**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE CERGY-PONTOISE**

Sujet :

**ETUDE ET MODELISATION DE LA STABILITE DES STRUCTURES ELANCEES  
EN BETON ARME**

*Soutenue le 12 décembre 2003 , devant le jury composé de :*

Richard CABRILLAC,	Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise	Co-directeur de thèse
Rose Marie COURTADE	Professeur à l'Université Claude Bernard de Lyon	Président
Hélène DUMONTET	Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise	Co-directeur de thèse
Raoul FRANÇOIS	Professeur à l'INSA de TOULOUSE	Rapporteur
Laurent PROSLIER	Professeur à l'Université PARIS X Nanterre	Rapporteur
Sophie ORTOLA	Maître de Conférences à l'Université de Cergy-Pontoise	Examineur

Travail réalisé au

Laboratoire de Modélisation Matériaux et Structures

**UMR CNRS 7143**

Université Pierre et Marie curie / Université de Cergy-Pontoise

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Modélisation du Flambement des Structures Elastiques</b>	<b>9</b>
<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1.2</b>	<b>Équations d'équilibre</b>	<b>9</b>
1.2.1	Notations	10
1.2.2	Tenseur des déformations	11
1.2.3	Interprétation unidimensionnelle	12
a)	Grandes déformations et grands déplacements	13
b)	Petites déformations et grands déplacements	13
c)	Petites déformations et petits déplacements	13
1.2.4	Tenseur des contraintes	14
1.2.5	Loi de comportement	14
a)	Loi de comportement d'un corps hyperélastique	15
b)	Loi de comportement d'un corps élastique linéaire	15
1.2.6	Équations du problème d'équilibre	16
<b>1.3</b>	<b>Stabilité de l'équilibre</b>	<b>17</b>
1.3.1	Notations	17
1.3.2	Formulation du critère de stabilité	18
1.3.3	Expression du critère de stabilité en grands déplacements	19
<b>1.4</b>	<b>Implémentation numérique d'un problème d'équilibre en grandes transformations</b>	<b>21</b>
1.4.1	Formulation variationnelle du problème d'équilibre	21
1.4.2	Discrétisation du problème par la méthode des éléments finis	22
1.4.3	Méthode de résolution en non-linéaire géométrique	24
1.4.4	Méthode de résolution en non-linéaire matériel	25
<b>1.5</b>	<b>Étude numérique de la stabilité d'un équilibre</b>	<b>26</b>
1.5.1	Discrétisation du critère de stabilité	26
1.5.2	Traitement de la stabilité en petites perturbations	27
1.5.3	Traitement de la stabilité en grands déplacements	28
<b>1.6</b>	<b>conclusion</b>	<b>29</b>

<b>2</b>	<b>Étude de la stabilité des poutres élancées en béton armé</b>	<b>31</b>
<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Équations des poutres élancées élastiques</b>	<b>32</b>
2.2.1	Notations	32
2.2.2	Cinématique et déformations	33
2.2.3	Efforts généralisés	34
2.2.4	Lois de comportement des poutres homogènes	35
2.2.5	Équations d'équilibre d'une poutre dans une configuration intermédiaire	35
2.2.6	Critère de stabilité	37
<b>2.3</b>	<b>Modélisation du comportement du béton armé</b>	<b>39</b>
2.3.1	Comportement du béton	39
2.3.2	Comportement de l'acier	40
2.3.3	Processus d'homogénéisation	42
2.3.4	Comportement homogène équivalent du béton armé	43
<b>2.4</b>	<b>Approche incrémentale de la stabilité des poutres élancées en béton armé</b>	<b>45</b>
2.4.1	Détermination itérative des déformations réelles des poutres en béton armé	45
2.4.2	Actualisation des caractéristiques géométriques et mécaniques	48
2.4.3	Actualisation des configurations déformées	48
2.4.4	Analyse de la stabilité des configurations intermédiaires	50
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>52</b>
<b>3</b>	<b>Mise en œuvre numérique et validations</b>	<b>54</b>
<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>54</b>
<b>3.2</b>	<b>Implémentation numérique du logiciel</b>	<b>55</b>
3.2.1	Présentation générale	55
3.2.2	Calcul élastique linéaire	57
3.2.3	Traitement de la non-linéarité matérielle	58
3.2.4	Traitement de la non-linéarité géométrique	62
3.2.5	Traitement de la stabilité	64
3.2.4	Les fonctionnalités du logiciel développé	68

<b>3.3</b>	<b>Validations du logiciel développé</b>	<b>68</b>
3.3.1	Poutres élastiques linéaires homogènes	69
3.3.2	Poutres en béton armé	71
3.3.3	Confrontation avec les résultats des tables de Feassel	72
3.3.4	Confrontation avec des résultats expérimentaux	74
3.3.5	Tests de sensibilité aux caractéristiques physiques des poutres	76
a)	Influence de l'élancement géométrique	77
b)	Influence de l'excentricité	78
c)	Influence de la résistance à la compression du béton	78
d)	Influence de la position des aciers	79
e)	Bilan	79
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>81</b>
<b>4</b>	<b>Application à l'analyse de la stabilité de structures usuelles en béton armé</b>	<b>83</b>
<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>83</b>
<b>4.2</b>	<b>Stabilité de poteau</b>	<b>84</b>
4.2.1	Caractéristiques du poteau	85
4.2.2	Simulations numériques et confrontations	86
4.2.4	Sensibilité aux paramètres de simulation numérique	90
a)	Influence des pas de chargement	90
b)	Influence du maillage	93
c)	Influence de la prise en compte de la non-linéarité matérielle	94
<b>4.3</b>	<b>Stabilité de portique</b>	<b>96</b>
4.3.1	Caractéristiques du portique	98
4.3.2	Simulations numériques et confrontations	101
4.3.3	Validation du processus de remaillage	107
<b>4.4</b>	<b>Stabilité de cadre</b>	<b>109</b>
4.4.1	Caractéristiques du cadre	110
4.4.2	Simulations numériques et confrontations	112
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>114</b>
	<b>Conclusion générale</b>	<b>117</b>

<b>Bibliographie</b>	<b>120</b>
<b>Annexe 1</b>	<b>128</b>
<b>Annexe 1</b>	<b>140</b>

## **Introduction**

L'objectif de ce travail est l'étude du flambement des éléments élancés en béton armé usuellement présents dans les structures Génie Civil avec l'élaboration, à cet effet, d'une modélisation adaptée et le développement d'un outil numérique fiable.

Auparavant jusqu'aux années soixante, les normes présentaient des règles de dimensionnement et de vérification se fondant sur le concept de contrainte admissible. Les contraintes étaient alors calculées aux sections les plus sollicitées et le dimensionnement était jugé satisfaisant dès que les dites contraintes étaient inférieures à une valeur admissible prédéterminée. Celle-ci était obtenue en divisant la contrainte, correspondant le plus souvent à la limite élastique du matériau, par un coefficient de sécurité approprié qui était différent selon le mode de ruine, l'utilisation de la structure ou le type d'actions. Cette technique s'est avérée critiquable car elle postule un comportement élastique linéaire fragile des matériaux constitutifs de la structure. En effet, la plupart des matériaux présentent un comportement ductile qui peut être exploité avant que la structure n'atteigne son maximum de capacité portante. De plus, plusieurs matériaux, et en particulier le béton, présentent un comportement non linéaire en phase élastique.

La considération du comportement non linéaire des matériaux ou/et de leur phase plastique conduit à une approche plus réaliste que le calcul en contrainte admissible et permet généralement un dimensionnement plus fiable et plus économique des structures. Parmi les matériaux couramment utilisés dans la construction, le béton armé est un de ceux dont le comportement est le plus complexe. Celui-ci est, en effet, composé de deux matériaux élastoplastiques à comportement différents : le béton présentant une faible résistance à la traction et un comportement non linéaire en compression en phase élastique et l'acier présentant un comportement symétrique en traction et en compression avec une phase élastique linéaire.

Par ailleurs, en plus du comportement unilatéral et de la non-linéarité matérielle du béton un autre type de non-linéarité est à considérer dans le dimensionnement au flambement des structures élancées en béton armé : la non-linéarité géométrique due aux grands déplacements. En effet ces derniers engendrent des effets du second ordre qui se

traduisent par l'apparition de flèches importantes générant des moments de flexion préjudiciables pour la stabilité des structures.

En fait, la possibilité de pouvoir procéder à une analyse de stabilité prenant en compte les deux types de non-linéarité et le caractère unilatéral du comportement du béton dans les codes de calcul par éléments finis permet d'une part, d'analyser la structure comme un tout plutôt que de vérifier indépendamment les éléments structuraux qui la constituent, et d'autre part de simuler numériquement le comportement de la structure lorsque la théorie ou les règles de dimensionnement font défaut pour le cas rencontré. C'est dans cette optique qu'est née l'idée de développer un outil numérique permettant de répondre à ces besoins et suffisamment général pour simuler la stabilité des diverses structures rencontrées en génie civil. Pour cela, nous avons été amenés à enrichir un code de calcul par élément finis, en l'occurrence SYSTUS utilisé en bureaux d'études, par des modules spécifiques de traitement de stabilité des structures élancées en béton armé. La complexité du comportement de ce dernier empêche en effet, d'utiliser la procédure d'analyse de stabilité propre au code de calcul et oblige à mettre en place une stratégie de modélisation du flambement prenant en compte en plus de la non-linéarité géométrique, le comportement non linéaire et unilatéral du béton. En effet si dans une section fléchie en béton armé la contrainte de traction dépasse la contrainte limite de traction du béton, celui-ci est usuellement considéré fissuré. De ce fait, cette partie de la section n'a plus aucune raideur et l'inertie totale de la section se trouve diminuée. Pour des structures en béton armé soumises au flambement il est classique, dans les bureaux d'études, de faire le calcul en trois étapes, pour différents pas de chargement successifs :

- calcul des efforts et de la déformée à l'aide d'un logiciel de calcul de structures,
- calcul des contraintes dans les sections et des inerties efficaces restantes avec un autre logiciel spécifique de calcul de sections en béton armé,
- retour au calcul des efforts et de la déformée avec les nouvelles inerties sur la structure déformée du pas de charge précédent.

Cette procédure n'est généralement pas automatisée et le calcul des déformées ne tient pas compte du comportement du béton armé. L'implémentation numérique effectuée au cours de ce travail a permis d'automatiser le calcul précédent en couplant au code de calcul de structures SYSTUS un programme de calcul de sections en béton armé évaluant la déformée réelle à chaque pas de chargement ainsi que les inerties efficaces. Les méthodologies proposées au cours de cette étude ont donc permis de créer, dans le code de calcul SYSTUS, une procédure d'analyse de flambement prenant en compte le comportement du béton armé. Ces méthodologies sont liées aux possibilités d'implémentation dans le code de calcul.

Le mémoire est organisé de la façon suivante :

Les aspects théoriques liés au flambement des structures élastiques, sont fournis au chapitre 1 à savoir :

- les équations régissant l'équilibre et la stabilité des structures élastiques notamment dans le cas des grands déplacements,
- les principes de discrétisation de ces équations en vue de la simulation numérique du flambement.

Le passage aux structures élancées en béton armé est présenté au chapitre 2 dans le cadre d'une description Lagrangienne actualisée. Le choix de cette approche est imposé par l'utilisation du code de calcul par éléments finis SYSTUS dans lequel sera implémentée la méthode de calcul élaborée. Les équations générales sont formulées en prenant en compte la non-linéarité matérielle due au comportement du béton et la non-linéarité géométrique due aux grands déplacements. Un processus incrémental d'analyse de stabilité d'équilibre donne lieu à un critère de stabilité basé sur le moment du second ordre.

Le chapitre 3 comporte deux parties. Dans la première est présentée la stratégie numérique adoptée ainsi que les outils numériques utilisés pour implémenter la méthode de calcul, présentée au chapitre 2, dans le code de calcul par éléments finis SYSTUS. La seconde est dédiée à la validation de l'outil numérique proposé. Celle-ci consiste, d'une part à confronter les résultats des méthodes explicites et expérimentales, et d'autre part à analyser la sensibilité à certains paramètres géométriques et mécaniques.

Dans le chapitre 4, l'application de l'outil développé consiste à simuler le comportement jusqu'à la ruine de structures Génie Civil telles que poteaux, portiques et cadres en béton armé. Dans chaque cas, les résultats de simulation sont confrontés à des résultats numériques et expérimentaux issus de la bibliographie.

Enfin une conclusion générale tire le bilan de ce travail en termes d'efficacité et de fiabilité du modèle numérique mis en œuvre et présente également quelques perspectives de développement liées à l'approche utilisée.



<b>Modélisation du Flambement des Structures Élastiques</b>	<b>9</b>
<b>1.1 Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1.2 Équations d'équilibre</b>	<b>9</b>
1.2.1 Notations	10
1.2.2 Tenseur des déformations	11
1.2.3 Interprétation unidimensionnelle	12
a) Grandes déformations et grands déplacements	13
b) Petites déformations et grands déplacements	13
c) Petites déformations et petits déplacements	13
1.2.4 Tenseur des contraintes	14
1.2.5 Loi de comportement	14
a) Loi de comportement d'un corps hyperélastique	15
b) Loi de comportement d'un corps élastique linéaire	15
1.2.6 Équations du problème d'équilibre	16
<b>1.3 Stabilité de l'équilibre</b>	<b>17</b>
1.3.1 Notations	17
1.3.2 Formulation du critère de stabilité	18
1.3.3 Expression du critère de stabilité en grands déplacements	19
<b>1.4 Implémentation numérique d'un problème d'équilibre en grandes transformations</b>	<b>21</b>
1.4.1 Formulation variationnelle du problème d'équilibre	21
1.4.2 Discrétisation du problème par la méthode des éléments finis	22
1.4.3 Méthode de résolution en non-linéaire géométrique	24
1.4.4 Méthode de résolution en non-linéaire matériel	25
<b>1.5 Étude numérique de la stabilité d'un équilibre</b>	<b>26</b>
1.5.1 Discrétisation du critère de stabilité	26
1.5.2 Traitement de la stabilité en petites perturbations	27
1.5.3 Traitement de la stabilité en grands déplacements	28
<b>1.6 conclusion</b>	<b>29</b>

# Modélisation du Flambement des Structures Élastiques

## 1.1 Introduction

L'étude du flambement des structures en béton armé que nous nous proposons d'aborder dans ce travail, nécessite de résoudre des problèmes présentant deux types de non-linéarité : une non-linéarité géométrique due aux grands déplacements générés par le flambement et une non-linéarité matérielle résultant des relations contraintes-déformations non-linéaires de part le comportement du matériau constitutif. Cette dernière est due à la présence du matériau béton dont le comportement est non-linéaire.

L'objectif de ce premier chapitre est d'introduire l'ensemble des équations régissant l'équilibre et la stabilité de structures tridimensionnelles homogènes élastiques soumises à des grands déplacements. Des remarques sur la non-linéarité matérielle apparaissent au cours de certains paragraphes, mais sa prise en compte effective n'intervient d'une manière détaillée qu'au chapitre suivant pour des structures en béton armé unidimensionnelles. Les principes de discrétisation des équations présentées en vue d'une simulation numérique du flambement sont introduits. Ils seront repris dans les chapitres suivants pour des structures élancées en béton armé.

## 1.2 Équations d'équilibre

Différentes descriptions peuvent être adoptées, Lagrangienne, Eulérienne, corotationnelle, pour repérer un point de la structure au cours de sa déformation.

Nous adoptons ici une description Lagrangienne, le système de coordonnées se rapportant à la configuration initiale, non déformée, invariante dans le temps [Ger96]. Dans une description Eulérienne, le système de coordonnées est attaché à la configuration déformée [DUV90]. Dans une description corotationnelle, la configuration de référence est celle du solide en mouvement de corps rigide [CHA91].

Nous donnons au paragraphe suivant quelques notations classiques avant de rappeler les équations fondamentales de l'équilibre d'un corps élastique.

### 1.2.1 Notations

Considérons un corps élastique soumis au cours du temps à une certaine déformation mesurée à partir de sa configuration initiale  $C^0$ , Figure 1.1.

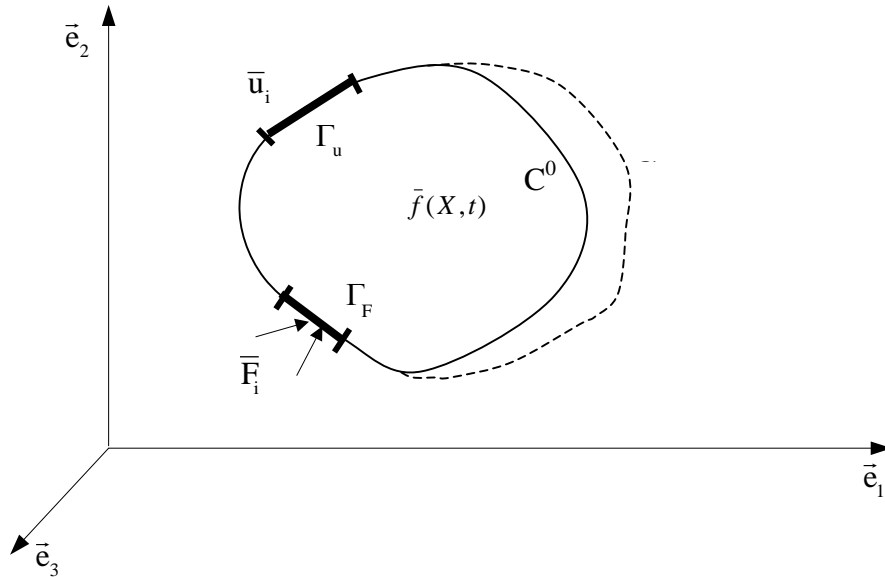


Figure 1.1 - Configurations non déformée et déformée

On convient de noter :

$V^0$  le volume occupé par ce corps dans sa configuration initiale  $C^0$ ,

$V^t$  le volume occupé par le corps dans sa configuration déformée  $C$  à l'instant  $t$ ,

$[X_1, X_2, X_3]$  les coordonnées Lagrangiennes d'un point du corps rapportées à un repère cartésien orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de la configuration non déformée  $C^0$ ,

$\bar{u}(X, t)$  le déplacement observé en un point de  $V^t$  dont les composantes sont  $(u_1, u_2, u_3)$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,

$\Gamma_u$  la partie de  $\partial V^0$ , frontière de  $V^0$ , où les déplacements de la structure sont nuls,

$\Gamma_F$  la portion de  $\partial V^0$  soumise à des efforts surfaciques  $\bar{F}$ ,

$\bar{f}(X, t)$  la densité d'efforts volumiques appliquée.

La convention de sommation sur les indices répétés sera adoptée dans la suite de ce chapitre.

### 1.2.2 Tenseur des déformations

A un instant donné, le tenseur des déformations en chaque point du corps, rapporté à la configuration initiale  $C^0$ , est défini par le tenseur de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  [Ger95] qui a pour composantes :

$$E_{ij}(X, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right) \quad (1.1)$$

Le tenseur symétrique du second ordre  $\mathbf{E}$  s'exprime classiquement par la somme de deux tenseurs :

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} + \eta_{ij} \quad (1.2)$$

où  $\varepsilon$  est la partie linéaire du tenseur  $\mathbf{E}$  :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (1.3)$$

et  $\eta$  est la partie quadratique du tenseur  $\mathbf{E}$  traduisant la non-linéarité géométrique :

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right) \quad (1.4)$$

### 1.2.3 Interprétation unidimensionnelle

Une interprétation de ces différents termes du tenseur de Green-Lagrange peut se faire sur l'exemple unidimensionnel d'une barre articulée dans le plan  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , Figure 1.2.

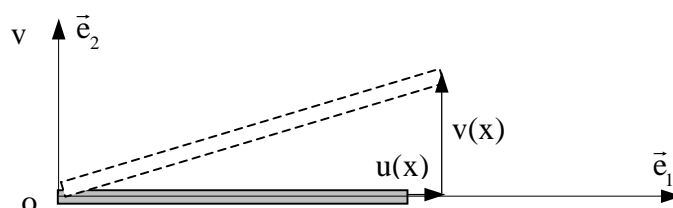


Figure 1.2 - Déformations : exemple de la barre

Notons  $u(X)$  et  $v(X)$  les composantes du champ de déplacement dans ce plan :

$$\vec{u} = u(X)\vec{e}_1 + v(X)\vec{e}_2 \quad (1.5)$$

D'après (1.1), la déformation longitudinale a pour expression :

$$E_{xx} = \frac{du}{dX} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dX} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dX} \right)^2, \quad (1.6)$$

où  $\frac{du}{dX}$  représente l'allongement selon la direction  $\vec{e}_1$  et  $\frac{dv}{dX}$  la rotation dans le plan de la barre.

L'expression de la déformation (1.6) se simplifie selon l'ordre de grandeur de ses termes. Ainsi on peut distinguer les cas des grandes déformations ou des petites déformations. Dans ce dernier cas, les déplacements peuvent être petits ou grands. Selon les différents cas étudiés, les déformations peuvent être simplifiées comme suit :

**a) Grandes déformations et grands déplacements**

Ce cas correspond à une rotation  $\frac{dv}{dX}$  et une déformation axiale  $\frac{du}{dX}$  importantes. La déformation  $E_{xx}$  est alors donnée par l'expression (1.6), aucun terme ne pouvant être négligé.

**b) Petites déformations et grands déplacements**

Lorsque la déformation axiale  $\frac{du}{dX}$  reste petite par rapport aux termes de rotations:

$$\frac{du}{dX} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dX} \ll \frac{dv}{dX}$$

la déformation peut alors être approchée par :

$$E_{xx} = \frac{du}{dX} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dX} \right)^2 \quad (1.7)$$

**c) Petites déformations et petits déplacements**

Lorsque la déformation axiale et la rotation restent petites :

$$\frac{du}{dX} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dX} \ll 1$$

les termes quadratiques sont négligés, et on retrouve l'expression classique des déformations linéarisées :

$$E_{xx} = \varepsilon_{xx} = \frac{du}{dX} \quad (1.8)$$

On dit alors que la structure est étudiée en Hypothèse des Petites Perturbations (H.P.P.)

Dans ce travail, les structures que nous étudierons par la suite seront soumises à de grands déplacements et de grandes rotations, les déformations restant petites.

### 1.2.4 Tenseur des contraintes

L'écriture des équations d'équilibre en variables Lagrangiennes introduit naturellement un tenseur des contraintes, appelé premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, noté  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , défini par la relation :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\rho_0}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G}^t \quad (1.9)$$

où  $\rho_0$  désigne la masse volumique du milieu à l'état initial,  $\rho$  la masse volumique à l'instant  $t$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy. Le tenseur  $\mathbf{G}$  représente l'inverse du tenseur gradient de la déformation  $\mathbf{F}$  défini par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \text{grad}_x \vec{u} \quad (1.10)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité d'ordre 2 et  $\mathbf{G}^t$  désigne la transposée de ce tenseur. Le premier tenseur de Piola Kirchhoff ne s'exprimant pas totalement dans le repère initial, il est usuel d'introduire le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, noté  $\mathbf{S}$  [Ger96], et relié au tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , représentant les efforts internes au milieu, par la relation :

$$\mathbf{S} = \frac{\rho_0}{\rho} \mathbf{G} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G}^t \quad (1.11)$$

Ce tenseur est totalement défini dans le repère de Lagrange et est symétrique.

### 1.2.5 Loi de comportement

Le formalisme de la thermodynamique [LEM85] permet de relier classiquement le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  au tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{g}(\mathbf{E}) = \rho_0 \frac{\partial w(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (1.12)$$

où  $w(\mathbf{E})$  est la densité d'énergie interne de déformation.

### a) Loi de comportement d'un corps hyperélastique

Dans le cas d'un matériau de comportement hyperélastique [CIA86], l'énergie interne  $w$  s'exprime en fonction des invariants  $I_1, I_2, I_3$  du tenseur de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  [SAL88] :

$$w(\mathbf{E}) = w(I_1, I_2, I_3) \quad (1.13)$$

$$\text{avec : } I_1 = \text{tr}\mathbf{E}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}\mathbf{E}^2, \quad I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}\mathbf{E}^3$$

La relation générale (1.12) s'écrit alors:

$$\mathbf{S} = \gamma_0 \mathbf{I} + \gamma_1 \mathbf{E} + \gamma_2 \mathbf{E}^2 + o(\mathbf{E}^3) \quad (1.14)$$

$$\text{avec } \gamma_0 = \frac{\partial w}{\partial I_1}, \quad \gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial I_2}, \quad \gamma_2 = \frac{\partial w}{\partial I_3}.$$

### b) Loi de comportement d'un corps élastique linéaire

Si le matériau présente un comportement élastique linéaire, il ne subsiste dans la relation (1.14) que les termes du premier ordre en déformations :

$$\mathbf{S} = \gamma_0 \mathbf{I} + \gamma_1 \mathbf{E} \quad (1.15)$$

Cette loi de comportement caractérise les matériaux dits de Saint-Venant-Kirchhoff, qualifiés de modèles non-linéaires les plus simples [CIA86]. En introduisant un tenseur d'élasticité du quatrième ordre  $\mathbf{H}$ , la loi (1.15) s'écrit encore :

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{H}\mathbf{E} \quad (1.16)$$

où  $\bar{\mathbf{S}}$  représente le tenseur de contraintes initiales. Lorsque l'état initial est un état naturel, c'est à dire non contraint, le tenseur  $\bar{\mathbf{S}}$  est nul. Et l'équation (1.16) se réduit à :



$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{E} \quad (1.17)$$

L'énergie interne spécifique  $w$  associée à ce comportement est alors une forme quadratique des déformations :

$$w(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{H}\mathbf{E}\mathbf{E} \quad (1.18)$$

Lorsque le matériau est isotrope, le tenseur  $\mathbf{H}$  n'est fonction que de deux coefficients indépendants :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\lambda, \mu), \quad (1.19)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé [DUV90].

### 1.2.6 Équations du problème d'équilibre

Dans le cadre de cette approche Lagrangienne, les équations d'équilibre d'un solide déformable s'écrivent [Ger96] :

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left( S_{ij} + S_{jm} \frac{\partial u_i}{\partial X_m} \right) + \bar{f}_i = 0 \quad \text{sur } V^0 \quad (1.20)$$

A ces équations d'équilibre (1.20) et à la loi de comportement (1.16) pour des matériaux de Saint-Venant-Kirchhoff, il convient d'ajouter les conditions aux limites sur  $\partial V^0$  le bord du domaine  $V^0$  non déformé :

$$\begin{aligned} n_j \left( S_{ij} + S_{im} \frac{\partial u_j}{\partial X_m} \right) &= \bar{F}_i && \text{sur } \Gamma_F \\ u_i &= 0 && \text{sur } \Gamma_u \end{aligned} \quad (1.21)$$

où  $\bar{n}$  désigne la normale unitaire extérieure au domaine  $V^0$ .

### 1.3 Stabilité de l'équilibre

Nous nous proposons maintenant d'étudier la stabilité de la configuration d'équilibre d'un corps élastique dont les équations (1.16, 1.19, 1.20) viennent d'être rappelées.

Cette configuration d'équilibre peut être qualifiée de stable, instable ou indifférente [FRE94]. Ces différents états peuvent s'illustrer en termes de déplacements : si le corps est légèrement écarté de sa configuration d'équilibre, soit il y revient (*équilibre stable*), soit il s'écarte d'avantage (*équilibre instable*), soit il reste écarté (*équilibre indifférent*).

Cette différenciation peut également se traduire en terme d'énergie potentielle. Lorsqu'on soumet le corps à une variation de déplacements, l'énergie potentielle soit augmente (*équilibre stable*), soit diminue (*équilibre instable*), soit ne varie pas (*équilibre indifférent*).

Nous complétons au paragraphe suivant les notations introduites avant de donner les différentes formulations mathématiques de ces critères de stabilité.

#### 1.3.1 Notations

Soit donc une structure décrite dans sa configuration initiale  $C^0$ . Pour étudier la stabilité de sa configuration d'équilibre  $C$ , nous introduisons une petite perturbation de cet équilibre à travers un déplacement  $\alpha \bar{u}^*$  où  $\alpha$  est un paramètre très petit et  $\bar{u}^*$  un déplacement cinématiquement admissible imposé [COM95], Figure 1.3.

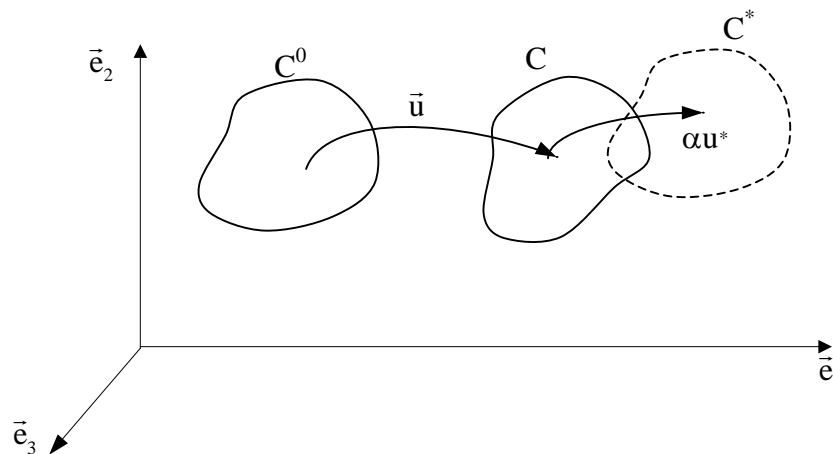


Figure 1.3 - Configuration perturbée

On convient de désigner par  $C^*$  la configuration occupée par la structure après cette perturbation. Le champ de déplacement total à l'état perturbé est donc donné par :

$$\vec{U} = \vec{u} + \alpha \vec{u}^* \quad (1.22)$$

où  $\vec{u}$  est le champ de déplacements associé à la configuration d'équilibre  $C$ .

L'énergie potentielle totale associée à la configuration d'équilibre  $C$ , notée  $\pi$ , se définit comme la somme de l'énergie élastique interne  $w$  introduite en (1.12) et du travail des forces extérieures  $w_{ext}$  donné par :

$$w_{ext} = -\int_{V^0} \bar{f}_i u_i dV - \int_{\Gamma_F} \bar{F}_i u_i ds \quad (1.23)$$

Pour une structure élastique linéaire, cette énergie potentielle a pour expression :

$$\pi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{V^0} H^{kl}{}_{ij} E_{kl} E_{ij} dv - \int_{V^0} \bar{f}_i u_i dv - \int_{\Gamma_F} \bar{F}_i u_i ds \quad (1.24)$$

### 1.3.2 Formulation du critère de stabilité

Comme nous l'avons défini précédemment, le critère de stabilité d'une structure peut être énergétique et s'exprimer en fonction de l'accroissement de l'énergie potentielle totale entre une configuration perturbée  $C^*$  et la configuration d'équilibre étudiée  $C$ .

Cet accroissement d'énergie potentielle totale est noté :

$$\Delta\pi = \pi(\vec{u} + \alpha \vec{u}^*) - \pi(\vec{u}) \quad (1.25)$$

Le paramètre  $\alpha$  étant petit, l'énergie potentielle après perturbation peut se développer à l'aide de la formule de Taylor sous la forme :

$$\pi(\vec{u} + \alpha \vec{u}^*) = \pi(\vec{u}) + \alpha \frac{\partial \pi}{\partial u_i} u_i^* + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial u_i \partial u_j} u_i^* u_j^* + 0(\alpha^3) + \dots \quad (1.26)$$

Ainsi, l'accroissement d'énergie potentielle  $\Delta\pi$  s'écrit :

$$\Delta\pi = \alpha\delta^1\pi + \alpha^2\delta^2\pi + O(\alpha^3) \quad (1.27)$$

où  $\delta^1\pi$  et  $\delta^2\pi$  désignent les variations première et seconde de l'énergie potentielle.

La configuration C étant une configuration d'équilibre du corps, la variation première de l'énergie potentielle s'annule :

$$\delta^1\pi = 0 \quad (1.28)$$

et l'accroissement de l'énergie potentielle lors de la perturbation se réduit à :

$$\Delta\pi = \alpha^2\delta^2\pi + O(\alpha^3) \quad (1.29)$$

Le critère de stabilité énergétique ne porte donc que sur le signe de la variation seconde de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} \delta^2\pi > 0 & : && \text{équilibre stable,} \\ \delta^2\pi < 0 & : && \text{équilibre instable,} \\ \delta^2\pi = 0 & : && \text{équilibre indifférent.} \end{aligned}$$

Nous allons maintenant expliciter ce critère énergétique dans les cas d'une structure soumise à de grands déplacements, puis à des petits déplacements.

### 1.3.3 Expression du critère de stabilité en grands déplacements

Afin d'explicitier la variation d'énergie (1.29), il faut tout d'abord détailler l'expression du tenseur de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  en fonction du champ de déplacements total  $\vec{U}$ .

D'après la définition (1.1), ce tenseur se développe en puissance de  $\alpha$  sous la forme :

$$E_{ij}(u + \alpha u^*) = E^0_{ij} + \alpha E^I_{ij} + \alpha^2 E^{II}_{ij} \quad (1.30)$$

où les tenseurs  $E^0$ ,  $E^I$  et  $E^{II}$  sont définis par les relations :

$$E^0_{ij} = \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i + D_i u_k D_j u_k) \quad (1.31)$$

$$E^I_{ij} = \frac{1}{2}(D_i u^*_j + D_j u^*_i + D_i u_k D_j u^*_k + D_i u^*_k D_j u_k) \quad (1.32)$$

$$E^{II}_{ij} = \frac{1}{2} D_i u^*_k D_j u^*_k \quad (1.33)$$

et où  $D_i$  représente la dérivée partielle par rapport à la variable Lagrangienne  $X_i$ .

Compte-tenu de ces développements et de la loi de comportement (1.16), le second tenseur de Piolla-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  associé à la perturbation  $\mathbf{C}^*$  peut s'écrire :

$$\mathbf{S}(u + \alpha u^*) = \mathbf{H}\mathbf{E}(u + \alpha u^*) = \mathbf{S}^0 + \alpha \mathbf{S}^I + \alpha^2 \mathbf{S}^{II}, \quad (1.34)$$

où les tenseurs  $\mathbf{S}^0$ ,  $\mathbf{S}^I$  et  $\mathbf{S}^{II}$  sont donnés par :

$$\mathbf{S}^0 = \mathbf{H}\mathbf{E}^0, \quad \mathbf{S}^I = \mathbf{H}\mathbf{E}^I \quad \text{et} \quad \mathbf{S}^{II} = \mathbf{H}\mathbf{E}^{II}.$$

L'ensemble de ces développements permet d'écrire l'expression de l'énergie potentielle après perturbation (1.25) sous la forme :

$$\begin{aligned} \pi(\bar{u} + \alpha \bar{u}^*) &= \frac{1}{2} \int_{V^0} S^0_{ij} E^0_{ij} dv - \int_{V^0} \bar{f}_i u_i dv - \int_{\Gamma_F} \bar{F}_i u_i ds \\ &+ \alpha \left( \int_{V^0} S^0_{ij} E^I_{ij} dv - \int_{V^0} \bar{f}_i u^*_i dv - \int_{\Gamma_F} \bar{F}_i u^*_i ds \right) \\ &+ \alpha^2 \left[ \int_{V^0} \left( \frac{1}{2} H^{kl}_{ij} E^I_{kl} E^I_{ij} + S^0_{ij} E^{II}_{ij} \right) dv \right] + O(\alpha^3) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ainsi, par identification avec l'expression (1.27), la variation seconde de l'énergie potentielle  $\delta^2 \pi$  s'écrit :

$$\delta^2 \pi = \int_{V^0} \left( \frac{1}{2} H^{kl}_{ij} E^I_{kl} E^I_{ij} + S^0_{ij} E^{II}_{ij} \right) dv \quad (1.36)$$

Cette quantité, qui doit rester positive pour que le corps élastique soit en équilibre stable, se décompose donc en deux termes : le premier traduisant la non-linéarité géométrique apportée par les termes quadratiques du tenseur des déformations  $\mathbf{E}^I$  (1.31) et le second l'apport des contraintes initiales  $\mathbf{S}^0$  avant perturbation.

*Remarque* : lorsque les déplacements et déformations restent petits (H.P.P.), l'expression de la variation seconde de l'énergie  $\delta^2\pi$  se réduit à :

$$\delta^2\pi = \frac{1}{2} \int_{V^0} \left( H^{kl} \varepsilon^I_{ij} \varepsilon^I_{kl} \varepsilon^I_{ij} + S_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 \right) dv \quad (1.37)$$

avec :

$$\varepsilon^I_{ij} = \frac{1}{2} (D_i u^*_j + D_j u^*_i) \quad \text{et} \quad \varepsilon^{II}_{ij} = \frac{1}{2} D_i u^*_k D_j u^*_k \quad (1.38)$$

## 1.4 Implémentation numérique d'un problème d'équilibre en grandes transformations

Nous nous proposons dans cette partie de rappeler quelques méthodes numériques de résolution des problèmes d'équilibre en grands déplacements [GRA97]. Une fois la formulation variationnelle rappelée, des méthodes de résolution par éléments finis seront envisagées pour traiter les non-linéarités géométriques seules dans un premier temps, puis couplées aux non-linéarités matérielles dans un second temps.

### 1.4.1 Formulation variationnelle du problème d'équilibre

Le déplacement d'une structure élastique en équilibre, régi par les équations présentées au § 1.2, est solution du problème variationnel [CIA86] suivant :

Trouver  $\bar{\mathbf{u}} \in U_{ad}$  tel que

$$\int_{V^0} H^{kl} E_{kl}(\bar{\mathbf{u}}) E_{ij}(\bar{\mathbf{v}}) dv = \int_{V^0} \bar{f}_i v_i dv + \int_{\Gamma_F} \bar{F}_i v_i ds, \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in U_{ad}, \quad (1.39)$$

où  $U_{ad}$  est l'espace des champs cinématiquement admissibles défini par :

$$U_{ad} = \left\{ \bar{v} \text{ régulier} / \bar{v} = \bar{0} \text{ sur } \Gamma_u \right\}$$

En introduisant la décomposition (1.2) du tenseur de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  en parties linéaire  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et quadratique  $\boldsymbol{\eta}$ , cette formulation variationnelle se réécrit :

Trouver  $\bar{u} \in U_{ad}$  tel que,  $\forall \bar{v} \in U_{ad}$  :

$$\int_{V^0} H_{ij}^{kl} \left[ \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\bar{u}) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\bar{v}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\bar{u}) \boldsymbol{\eta}_{ij}(\bar{v}) + \boldsymbol{\eta}_{kl}(\bar{u}) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\bar{v}) + \boldsymbol{\eta}_{kl}(\bar{u}) \boldsymbol{\eta}_{ij}(\bar{v}) \right] dv = \int_{V^0} \bar{f}_i v_i dv + \int_{\Gamma_F} \bar{F}_i v_i ds \quad (1.40)$$

En vue de l'implémentation numérique, cette formulation variationnelle en déplacements est ensuite discrétisée par la méthode des éléments finis.

## 1.4.2 Discrétisation du problème par la méthode des éléments finis

Nous ne présentons pas ici en détail la méthode des éléments finis, on pourra consulter les ouvrages spécialisés [BAT91], [LUC96], [ZIE77].

Le principe de cette méthode est de discrétiser la structure étudiée et de ramener la recherche des déplacements  $\bar{u}(x, y, z)$  solution du problème (1.39) au calcul des valeurs des déplacements aux nœuds du maillage  $\{u_n\}$  telles que :

$$\{u(x, y, z)\} = \mathbf{N} \{u_n\}, \quad (1.41)$$

où  $\mathbf{N}$  désigne la matrice d'interpolation et  $\{u_n\}$  le vecteur des inconnues nodales.

Le tenseur des déformations  $\mathbf{E}$  est relié aux déplacements nodaux par la matrice de dérivation des fonctions d'interpolation notée  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \{u_n\} \quad (1.42)$$

Compte-tenu de (1.2), cette relation peut-être décomposée en une partie linéaire  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et une partie non-linéaire  $\boldsymbol{\eta}$  telles que :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_l \{u_n\} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}_{nl} \{u_n\} \quad (1.43)$$

où  $\mathbf{B}_l$  est la partie linéaire de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}_{nl}$  la partie non-linéaire.

En injectant ces discrétisations dans la formulation variationnelle (1.39), on obtient alors la formulation discrète suivante :

Trouver  $\{u_n\}$  cinématiquement admissible tel que :

$$\begin{aligned} \{v_n\}^t \left[ \sum_{e=1}^N \int_T (\mathbf{B}_l^t \mathbf{H} \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_l^t \mathbf{H} \mathbf{B}_{nl} + \mathbf{B}_{nl}^t \mathbf{H} \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}^t \mathbf{H} \mathbf{B}_{nl}) dv \right] \{u_n\} = \\ \{v_n\}^t \left[ \sum_{e=1}^N \int_T \mathbf{N}^t \bar{f} dv + \sum_{e=1}^P \int_{\partial T} \mathbf{N}^t \bar{\mathbf{F}} ds \right] \end{aligned} \quad (1.44)$$

$\forall \{v_n\}$  cinématiquement admissible,

où  $N$  désigne le nombre total d'éléments du maillage et  $P$  le nombre d'éléments en contact avec la frontière  $\Gamma_F$  où les efforts sont imposés.

Cette formulation conduit au système matriciel suivant :

$$[\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_{nl}] \{u_n\} = \mathbf{F} \quad (1.45)$$

où  $\mathbf{K}_l$  est la matrice de rigidité linéaire :

$$\mathbf{K}_l = \sum_{e=1}^N \int_T \mathbf{B}_l^t \mathbf{H} \mathbf{B}_l dv, \quad (1.46)$$

$\mathbf{K}_{nl}$  est la matrice de rigidité non-linéaire :

$$\mathbf{K}_{nl} = \sum_{e=1}^N \int_T (\mathbf{B}_l^t \mathbf{H} \mathbf{B}_{ln} + \mathbf{B}_{ln}^t \mathbf{H} \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{ln}^t \mathbf{H} \mathbf{B}_{ln}) dv \quad (1.47)$$

et  $\mathbf{F}$  le vecteur des efforts nodaux imposés :



$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^N \int_T \mathbf{N}^t \bar{\mathbf{f}} dv + \sum_{e=1}^P \int_{\partial T} \mathbf{N}^t \bar{\mathbf{F}} ds \quad (1.48)$$

La détermination des déplacements nodaux d'une structure soumise à de grands déplacements nécessite donc la résolution du système d'équations non-linéaires (1.47). Dans le cas d'une structure soumise à de petits déplacements, ce système devient linéaire, la matrice se réduisant à la matrice  $\mathbf{K}_l$ .

### 1.4.3 Méthode de résolution en non-linéaire géométrique

Les méthodes numériques classiquement utilisées pour la résolution de système d'équations non-linéaires sont des méthodes itératives. Le principe de ces méthodes consiste à approcher la solution par la résolution d'une succession de problèmes auxiliaires linéaires. Ces méthodes sont dites d'itérations linéaires [CUR93], [DHA84]

La résolution directe du système (1.45) est remplacée par la recherche itérative du champ  $\{u_n\}$  qui annulera le vecteur résidu  $\mathbf{R}$  défini par :

$$\mathbf{R}(\{u_n\}) = [\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_{nl}] \{u_n\} - \mathbf{F}. \quad (1.49)$$

Ce vecteur résidu peut s'interpréter comme la différence entre les efforts intérieurs et les efforts extérieurs imposés.

Notons  $\{u_n\}^i$  une approximation supposée connue de la solution à l'itération  $i$ . La méthode consiste alors à rechercher la solution  $\{u_n\}^{i+1}$  à l'itération  $i+1$  telle que :

$$\mathbf{R}(\{u_n\}^{i+1}) = 0 \quad (1.50)$$

Ce système non-linéaire est linéarisé en développant en série de Taylor le vecteur résidu  $\mathbf{R}$  au voisinage  $\{u_n\}^i$  dont chacune des composantes s'exprime alors par :

$$R_j(\{u_n\}^{i+1}) = R_j(\{u_n\}^i) + \frac{\partial R_j}{\partial u_k}(\{u_n\}^i) \Delta u_k + O(\Delta u^2), \quad 1 \leq j \leq N_n, \quad (1.51)$$

où  $u_k$  représente la  $k^{\text{ième}}$  composante de l'incrément de solution  $\{\Delta u\}_n^{i+1} = \{u_n\}^{i+1} - \{u_n\}^i$  et  $N_n$  le nombre total des nœuds.

Le système non-linéaire (1.50) est alors approché par le système linéaire suivant :

Trouver  $\{\Delta u\}_n^{i+1}$  tel que :

$$\bar{\mathbf{K}} \{\Delta u\}_n^{i+1} = \mathbf{F} - \mathbf{K} \{u_n\}^i \quad (1.52)$$

où  $\bar{\mathbf{K}}$  désigne la matrice tangente apparaissant dans le développement (1.50), de composantes :

$$\bar{K}_{jk} = \frac{\partial R_j}{\partial u_k} (\{u_n\}^i). \quad (1.53)$$

Partant d'une valeur  $\{u_n\}^0$  fixée par l'utilisateur, le processus itératif de résolution est poursuivi jusqu'à la convergence caractérisée par le critère d'arrêt suivant :

$$\|\mathbf{R}(\{u_n\}^{i+1})\| < \xi \quad (1.54)$$

où la précision  $\xi$  et la norme  $\|\mathbf{R}(\{u_n\}^{i+1})\|$  sont choisies par l'utilisateur.

D'autres choix de matrice tangente  $\bar{\mathbf{K}}$  sont possibles et conduisent à différentes méthodes de résolutions spécifiques [CUR93].

#### 1.4.4 Méthode de résolution en non-linéaire matériel

Lorsque le matériau présente de plus un comportement non-linéaire, la loi de comportement (1.12) reliant  $\mathbf{S}$  à  $\mathbf{E}$  s'écrit sous la forme générale :

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \mathbf{H}(\mathbf{E})\mathbf{E} \quad (1.55)$$

Le comportement variant avec les déformations engendrées dans le matériau, la résolution numérique du système (1.45) nécessite de prendre en compte les chargements extérieurs de manière incrémentale. L'algorithme itératif décrit au paragraphe précédent est donc inséré dans une boucle sur les incréments de charge imposés. Pour chaque incrément  $m$ , le comportement non-linéaire est approché grâce à un développement en séries :

$$S(E_{m+1}) = S(E_m) + \frac{\partial S}{\partial E}(E_m) \Delta E_{m+1} + O(\Delta E_{m+1}^2) \quad (1.56)$$

en une relation linéaire de la forme :

$$\Delta S = \bar{\mathbf{H}} \Delta \mathbf{E} \quad (1.57)$$

où  $\bar{\mathbf{H}}$  représente la matrice tangente du comportement et  $\Delta \mathbf{S}$  et  $\Delta \mathbf{E}$  les accroissements de contraintes et déformations sur l'incrément de chargement étudié.

La discrétisation suit alors le processus présenté au paragraphe 1.4.2 dans lequel la matrice de comportement  $\mathbf{H}$  est remplacée par sa linéarisation  $\bar{\mathbf{H}}$ .

## 1.5 Étude numérique de la stabilité d'un équilibre

Nous nous proposons de présenter maintenant les méthodes numériques utilisées classiquement pour s'assurer de la stabilité d'une structure. Ces méthodes diffèrent selon que la structure est soumise à de petits déplacements ou à de grands déplacements.

### 1.5.1 Discrétisation du critère de stabilité

Le formalisme de discrétisation présenté pour l'étude de l'équilibre est maintenant appliqué pour l'analyse de la stabilité, le champ de déplacements  $\vec{u}$  étant désormais connu. Comme on l'a vu au paragraphe 1.3.3, cette analyse porte sur la variation seconde de l'énergie potentielle (1.36). La discrétisation de cette expression nécessite de compléter les notations introduites précédemment.

Notant  $\{u_n^*\}$  les composantes nodales du champ de perturbation  $u^*$ , le tenseur des déformations  $\mathbf{E}^I$  défini par (1.3.2) peut s'écrire formellement sous la forme matricielle :

$$\mathbf{E}^I = [\mathbf{B}_l + \mathbf{C}(u)] \{u_n^*\} \quad (1.58)$$

où le champ  $\vec{u}$  apparaissant dans la partie  $\mathbf{C}$  de la matrice de dérivation est désormais connu. Le tenseur des déformations  $\mathbf{E}^{II}$  est, quant à lui, relié aux composantes nodales de  $\vec{u}^*$  par :

$$\mathbf{E}^H = \mathbf{D}^T \{u_n^*\} \mathbf{D} \{u_n^*\} = \mathbf{B}_{nl} \{u_n^*\} \quad (1.59)$$

La variation seconde de l'énergie potentielle se discrétise alors sous la forme [COM95]:

$$\delta^2 \pi (\{u_n\}) = \{u_n^*\}^t \mathbf{K}^* \{u_n^*\} \quad (1.60)$$

où  $\mathbf{K}^*$  se décompose en :

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_{nl}(u) + \mathbf{K}_\sigma(u) \quad (1.61)$$

avec la matrice de rigidité linéaire :

$$\mathbf{K}_l = \sum_{e=1}^N \int_{\mathcal{T}} \mathbf{B}_l^t \mathbf{H} \mathbf{B}_l dv \quad (1.62)$$

la partie non-linéaire dépendant du champ  $\bar{u}$  solution de l'équilibre,

$$\mathbf{K}_{nl}(u) = \sum_{e=1}^N \int_{\mathcal{T}} (\mathbf{B}_l^t \mathbf{H} \mathbf{C}(u) + \mathbf{C}(u)^t \mathbf{H} \mathbf{C}(u) + \mathbf{C}(u)^t \mathbf{H} \mathbf{B}_l) dv \quad (1.63)$$

et la matrice de rigidité des contraintes initiales :

$$\mathbf{K}_\sigma(u) = \sum_{e=1}^N \int_{\mathcal{T}} \mathbf{D}^t \mathbf{H} \mathbf{E}^0 \mathbf{D} dv \quad (1.64)$$

Cette dernière matrice, dans un calcul incrémental, tient compte de l'état de contrainte de l'incrément précédent.

## 1.5.2 Traitement de la stabilité en petites perturbations

Dans le cas des petites perturbations, la matrice  $\mathbf{K}^*$  introduite en (1.60) se réduit à :

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_l + \mathbf{K}_\sigma(u) \quad (1.65)$$

où  $\mathbf{K}_\sigma$  vérifie :  $\mathbf{K}_\sigma(\bar{u}) = \sum_{e=1}^N \int_T \mathbf{D}^t \mathbf{H} \varepsilon^0(\bar{u}) \mathbf{D} dv$  avec  $\varepsilon^0_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_i u_j + \mathbf{D}_j u_i)$

La stabilité de l'équilibre est assurée si la quantité  $\delta^2 \pi(\{u_n\}) = \{u_n^*\}^t \mathbf{K}^* \{u_n^*\}$  reste positive.

L'étude de cette stabilité est menée à travers la recherche de l'état critique caractérisé par [SON95]:

$$\delta^2 \pi(\{u_n\}) = \{u_n^*\}^t \mathbf{K}^* \{u_n^*\} = 0 \quad \forall \{u_n^*\} \quad (1.66)$$

En pratique, une fois la solution du système linéaire  $\mathbf{K}_l \{u\} = \mathbf{F}$  déterminée, il est possible, à partir de (1.63), de calculer le terme  $\mathbf{K}_l$  intervenant dans la matrice  $\mathbf{K}^*$  du problème de stabilité. Pour déterminer l'état critique défini par (1.65), on procède alors à un accroissement de charge  $\Delta \mathbf{F}$  qui va engendrer, du fait de la linéarité de  $\mathbf{K}_\sigma$  une nouvelle matrice  $\mathbf{K}^*$  caractéristique de la stabilité [GAL84] :

$$\mathbf{K}^* = [\mathbf{K}_l + \lambda \mathbf{K}_\sigma(u)] \quad (1.67)$$

On est amené alors à rechercher les valeurs critiques du multiplicateur  $\lambda$  qui vérifient :

$$[\mathbf{K}_l + \lambda \mathbf{K}_\sigma] \{u_n^*\} = 0 \quad \forall \{u_n^*\} \quad (1.68)$$

Ces valeurs critiques sont donc fournies par la résolution d'un problème aux valeurs propres. La méthode numérique des puissances inverses, par exemple, peut être utilisée pour cette recherche de valeurs propres [CIA90].

A la plus petite d'entre elles  $\lambda_{min}$  correspond la charge critique d'instabilité  $F_c = \lambda_{min} F$

### 1.5.3 Traitement de la stabilité en grands déplacements

Lorsque la structure étudiée est soumise à de grands déplacements, l'étude de l'équilibre est menée par incréments successifs de charge  $\lambda \mathbf{F}$  (cf. § 1.4.3), l'état déformé, pour un incrément de charge donné, étant défini par rapport à l'état d'équilibre

de l'incrément précédent. Pour chaque incrément de charge  $\lambda \mathbf{F}$ , il faut vérifier que la position intermédiaire d'équilibre trouvée est stable [SON00]. Comme précédemment, la détermination de l'état critique (1.66) associé à l'incrément de charge  $\lambda \mathbf{F}$  se ramène à la résolution d'un problème aux valeurs propres [KLA82]:

$$[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{nl}(\bar{u}) + \lambda \mathbf{K}_\sigma(\bar{u})] \{u_n^*\} = 0 \quad \forall \{u_n^*\} \quad (1.69)$$

L'étude de la stabilité de chacun des équilibres intermédiaires permet de construire point par point la courbe  $\lambda = \lambda(\mu)$ . La valeur de  $\lambda$  correspondant à  $\lambda = 1$  donne l'intensité du chargement critique  $F_c = \mu F$ .

## 1.6 conclusion

Le chapitre traite de l'aspect théorique de la stabilité des structures élastiques tridimensionnelles homogènes.

Les équations qui régissent le problème d'équilibre d'une structure soumises à de grands déplacements sont tout d'abord écrites en adoptant une description Lagrangienne. Les tenseurs de déformation de Green Lagrange et de contraintes, le tenseur de Piola-Kirchhof, associés à cette description sont naturellement introduits dans l'écriture de ces équations.

L'analyse de la stabilité d'une configuration d'équilibre est ensuite présentée par une approche énergétique. Un critère de stabilité basé sur l'accroissement de l'énergie potentielle totale est formulé sur le signe de la variation seconde de l'énergie.

En vue de la résolution numérique du problème d'équilibre, la formulation variationnelle de celui-ci est rappelée puis discrétisée par la méthode des éléments finis. La démarche d'une méthode de résolution est présentée tout d'abord dans le cas d'une structure élastique linéaire soumise à de grands déplacements, puis dans un second temps la prise en compte de la non linéarité matérielle est introduite.

L'approche numérique de la stabilité d'un état d'équilibre est enfin présentée. Les valeurs de chargement sont solution d'un problème aux valeurs propres.

Ces aspects théoriques présentés dans le cadre général de l'élasticité tridimensionnelle vont être appliqués et reformulés au chapitre suivant, dans le cas particulier des structures élancées en béton armé.

---

<b>Étude de la stabilité des poutres élancées en béton armé</b>	<b>31</b>
<b>2.1 Introduction</b>	<b>31</b>
<b>2.2 Équations des poutres élancées élastiques</b>	<b>32</b>
2.2.1 Notations	32
2.2.2 Cinématique et déformations	33
2.2.3 Efforts généralisés	34
2.2.4 Lois de comportement des poutres homogènes	35
2.2.5 Équations d'équilibre d'une poutre dans une configuration intermédiaire	35
2.2.6 Critère de stabilité	37
<b>2.3 Modélisation du comportement du béton armé</b>	<b>39</b>
2.3.1 Comportement du béton	39
2.3.2 Comportement de l'acier	40
2.3.3 Processus d'homogénéisation	42
2.3.4 Comportement homogène équivalent du béton armé	43
<b>2.4 Approche incrémentale de la stabilité des poutres élancées en béton armé</b>	<b>45</b>
2.4.1 Détermination itérative des déformations réelles des poutres en béton armé	45
2.4.2 Actualisation des caractéristiques géométriques et mécaniques	48
2.4.3 Actualisation des configurations déformées	48
2.4.4 Analyse de la stabilité des configurations intermédiaires	50
<b>2.5 Conclusion</b>	<b>52</b>

# Étude de la stabilité des poutres élancées en béton armé

## 2.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre au flambement des structures élancées en béton armé. L'analyse du flambement de ces structures conduit à prendre en compte la non-linéarité matérielle due au comportement du béton [HOF95] et, comme nous l'avons vu au premier chapitre, la non-linéarité géométrique due aux grands déplacements que subissent les poutres en flambement [HER74]. Ce traitement des deux non-linéarités peut être effectué à l'aide de différentes descriptions [CHA91]. L'approche peut être, par exemple, Lagrangienne totale, comme présentée au chapitre 1, les variables cinématiques et statiques étant exprimées par rapport à la configuration initiale non déformée [BAZ91]. La description Lagrangienne Actualisée est une approche incrémentale qui permet d'exprimer les variables cinématiques et statiques par rapport à la configuration déformée antérieure [GHA98]. C'est la description que nous avons choisie et que nous reprendrons dans la suite de ce chapitre. Le choix de cette approche ainsi que celui de l'ensemble de la démarche proposée dans ce mémoire sont liés aux possibilités d'implémentation dans le code de calcul par éléments finis Systus. La configuration antérieure peut aussi être approchée à l'aide d'une position intermédiaire résultant d'un mouvement de corps rigide [PAC96]. Il s'agit alors d'une description Lagrangienne Actualisée Approchée ou Corotationnelle [AOU98]. La configuration de référence étant alors une position intermédiaire résultant d'un mouvement de corps rigide.

Dans le cadre de l'approche Lagrangienne Actualisée retenue ici, nous présentons tout d'abord les équations générales pour des structures élancées homogènes de comportement linéaire. Dans un second temps, on établit les lois de comportement équivalentes pour des poutres hétérogènes dont l'un des matériaux constitutifs possède un comportement non-linéaire. En pratique on utilisera la loi réglementaire parabole rectangle pour le comportement du béton [PRA95], mais la démarche proposée s'adapte à d'autres types de lois de comportement non-linéaires. Enfin, le processus incrémental d'analyse de la stabilité de structures élancées en béton armé est décrit en dernière partie.



Le chargement est imposé par incréments successifs et l'analyse repose sur une succession d'étapes, elles-mêmes menées de façon itérative. Pour chaque pas de chargement, cette analyse comporte la détermination des déformations réelles par un algorithme de Newton-Raphson, l'actualisation des caractéristiques géométriques et mécaniques [BOU97], l'actualisation des configurations déformées intermédiaires, ainsi que l'étude de leur stabilité à travers un processus itératif sur les moments dits du second ordre.

## 2.2 Équations des poutres élancées élastiques

Dans ce paragraphe, nous présentons les équations nécessaires à l'étude d'un problème de flambement de poutres homogènes élastiques linéaires isotropes dans une description Lagrangienne Actualisée.

### 2.2.1 Notations

Considérons une structure élancée élastique de longueur  $L$ . Notant  $h$  la plus grande des dimensions transversales de cette structure, l'équilibre peut être étudié à l'aide d'une théorie de poutres si les dimensions de la structure et son rayon de courbure  $r$  vérifient les conditions suivantes :

$$\frac{1}{30} \leq \frac{h}{L} \leq \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \frac{r}{h} \geq 5$$

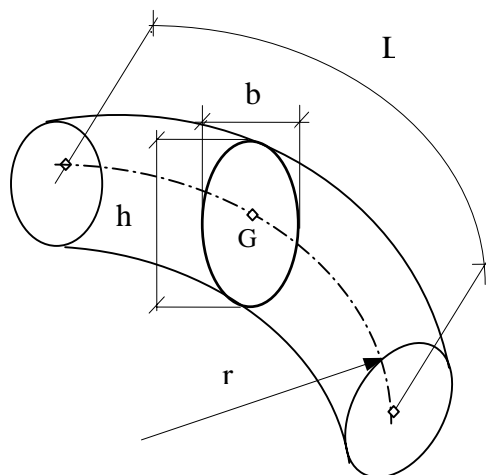


Figure 2.1 - Notations géométriques d'une poutre

Sous ces hypothèses, la structure élancée est alors modélisée par sa ligne moyenne  $L$  passant par l'ensemble des centres de gravité  $G$  des sections droites  $(\Sigma)$ , dont les aires seront notées  $A$ , figure 2.1.

Dans la suite, nous allons utiliser la théorie des poutres droites à plan moyen  $\bar{x}O\bar{y}$ , chargées dans leur plan. L'abscisse curviligne le long de  $L$  sera alors confondue avec la première variable d'espace  $x$ .

## 2.2.2 Cinématique et déformations

L'approche que nous avons retenue pour l'étude du flambement de poutres de comportement non-linéaire est une description Lagrangienne Actualisée. Les déformations des structures sont approchées de manière itérative, chaque incrément étant étudié sous l'hypothèse des petites perturbations par rapport à la configuration antérieure. Sous ces hypothèses, le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  et le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  introduits au chapitre 1 sont assimilés au tenseur des déformations linéarisées  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et au tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  [CHA 91].

La cinématique choisie classiquement pour décrire le comportement des poutres en flexion composée est la suivante :

$$\begin{cases} u_x &= u(x) - y\theta(x) \\ u_y &= v(x) \\ u_z &= 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $u_x$  et  $u_y$  sont les composantes du déplacement suivant la tangente à la ligne moyenne  $\bar{x}$  et la normale à la ligne moyenne  $\bar{y}$ .  $u(x)$ ,  $v(x)$  et  $\theta(x)$  représentent respectivement les translations et la rotation au centre de gravité  $G$  de la section droite d'abscisse  $x$ . Conformément à la description Lagrangienne Actualisée adoptée, les variables spatiales  $(x, y, z)$  sont définies par rapport à la configuration d'équilibre antérieure.

Les seules composantes non nulles du tenseur des déformations linéarisées sont les déformations longitudinale et de cisaillement qui ont pour expressions :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}(x) - y \frac{d\theta}{dx}(x) \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx}(x) - \theta(x) \right) \quad (2.3)$$

### 2.2.3 Efforts généralisés

Les efforts relatifs à une section droite ( $\Sigma$ ) d'abscisse  $x$  sont obtenus par intégration du vecteur contrainte de Cauchy  $\sigma(\vec{n})$  sur la section. Comme nous nous limitons ici à l'étude des poutres à plan moyen chargée dans leur plan, les composantes de la résultante se réduisent à l'effort normal  $N(x)$  suivant  $\vec{x}$ , l'effort tranchant  $V_y(x)$  suivant  $\vec{y}$ , et le moment résultant au centre de gravité  $G$  de la section n'a qu'une composante non nulle suivant  $\vec{z}$  :  $M_z(x)$  le moment fléchissant, figure 2.2.

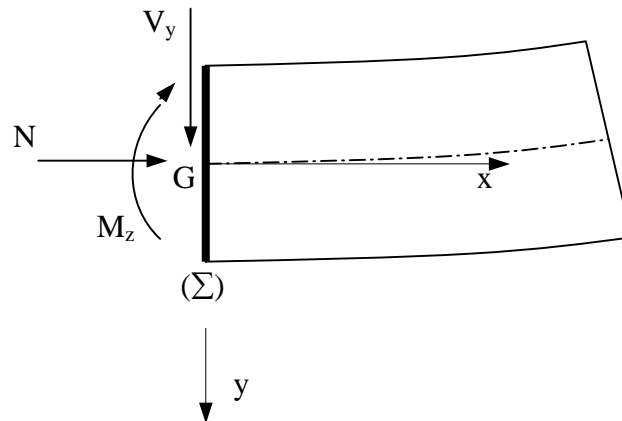


Figure 2. 2 - Efforts généralisés dans une section droite de poutre à plan moyen chargée dans son plan

Ces efforts s'écrivent donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) = \iint_{A(x)} \sigma(x, y, z) d\Sigma, \\ V_y(x) = \iint_{A(x)} \tau_y(x, y, z) d\Sigma, \\ M_z(x) = \iint_{A(x)} -y \sigma(x, y, z) d\Sigma. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où  $\sigma$  et  $\tau_y$  sont les composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte  $\sigma(\vec{n})$ .

### 2.2.4 Lois de comportement des poutres homogènes

Les lois de comportement des poutres homogènes isotropes sont obtenues en intégrant la loi de Hooke dans les définitions des efforts généralisés (2.4). On trouve alors pour l'effort normal, l'effort tranchant et le moment fléchissant les relations suivantes :

$$\begin{cases} N(x) = EA(x) \frac{du(x)}{dx} \\ V_y(x) = GA(x) \left( \frac{dv(x)}{dx} - \theta(x) \right) \\ M_z(x) = EI_z(x) \frac{d\theta(x)}{dx} \end{cases} \quad (2.5)$$

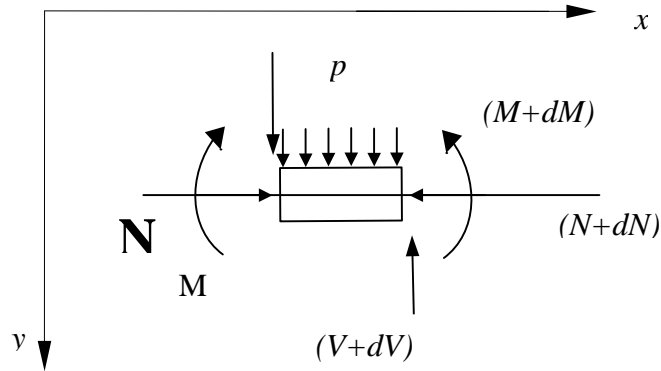
où  $E$  désigne le module d'Young du matériau constitutif,  $G$  le module de cisaillement et  $I_z(x)$  le moment quadratique par rapport à l'axe  $\bar{O}_z$  de la section droite. Ces relations supposent, de façon usuelle, que les poutres étudiées présentent une symétrie de leur géométrie par rapport à l'axe.

On omettra dans la suite, par souci d'allégement des notations, les indices  $y$  et  $z$ .

### 2.2.5 Équations d'équilibre d'une poutre dans une configuration intermédiaire

Nous considérons une poutre uniformément chargée par une densité  $\vec{p} = p\vec{y}$ . Nous allons décrire les équations d'équilibre de cette poutre dans une configuration intermédiaire déformée [TIM66].

Soit un petit tronçon de longueur infinitésimale  $dx$  en équilibre sous l'action des efforts de cohésion et de la densité de charge  $p$  :

Figure 2. 3 - Équilibre d'un élément  $dx$  de la déformée initiale

L'équilibre de ce tronçon conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} = 0 \\ V = -\frac{dM}{dx} + N \frac{dv}{dx} \\ \frac{d^2 M}{dx^2} = p + N \frac{d^2 v}{dx^2} \end{cases} \quad (2. 6)$$

La seconde équation de ce système peut s'écrire encore sous la forme :

$$V = -\frac{d}{dx}(M - Nv) \quad (2. 7)$$

mettant ainsi en évidence un terme lié à la non-linéarité géométrique qualifié de moment du second ordre :

$$M_{nl} = -N.v \quad (2. 8)$$

Le système d'équilibre ci-dessus correspond donc au système d'équations classiques des poutres en H.P.P., le moment fléchissant total étant ici décomposé en deux parties, le moment fléchissant usuel linéaire  $M_{lin}$  et un moment additif non-linéaire du second ordre  $M_{nl}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dx} = 0 \\ V = -\frac{d}{dx}(M_{lin} + M_{nl}) \\ \frac{d^2}{dx^2}(M_{lin} + M_{nl}) = p \end{array} \right. \quad (2.9)$$

En pratique, la discrétisation par éléments finis des équations d'équilibre (2.9) et de la loi de comportement (2.5) conduit à la résolution d'un système matriciel non-linéaire de la forme (1.45) :

$$[\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_{nl}] \{u_n\} = \mathbf{F} \quad (2.10)$$

Le procédé de résolution incrémentale de ce système sera décrit au paragraphe 2.4.

### 2.2.6 Critère de stabilité

Le critère retenu ici pour tester la stabilité des poutres porte sur le moment fléchissant généré dans les structures, moment que l'on a décomposé sous la forme :

$$M(x) = M_{lin}(x) + M_{nl}(x) \quad (2.11)$$

où le second membre comporte deux termes du fait de la non-linéarité géométrique. Le premier  $M_{lin}$  est la partie du moment fléchissant total correspondant au chargement initialement donné. Le second  $M_{nl}$  est la partie résultant de la prise en compte des configurations antérieures, et donc, des termes de grandes rotations liées à l'étude du problème de flambement. On a donc :

$$M(x) = M_{lin}(x) - N(x)v(x) \quad (2.12)$$

C'est sur ce dernier terme que nous avons choisi de tester la stabilité de l'équilibre atteint puisqu'il fait apparaître explicitement les flèches  $v(x)$  générées. La convergence de l'intensité des moments non-linéaires, dits du second ordre, vers une valeur finie atteste de la stabilité de la position d'équilibre intermédiaire étudiée [MOR75].

Une illustration du rôle de ce moment non-linéaire  $M_{nl}$  apparaît dans la recherche des charges ultimes des poutres homogènes de comportement élastique linéaire isotrope en petites déformations. La loi de comportement retenue dans ce cadre est :

$$M(x) = EI(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad (2.13)$$

où la rotation de la section droite  $\theta(x)$  est assimilée à la dérivée première de la flèche  $v(x)$ . Dans le cas d'une poutre présentant un défaut géométrique initial  $v_0(x)$  et soumise à des efforts de compression  $F$ , la flèche  $v(x)$  vérifie alors l'équation différentielle suivante :

$$EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -Fv_0(x) - Fv(x) \quad (2.14)$$

Si la courbure initiale est un arc de sinussoïde, la résolution de cette équation est explicite et conduit à :

$$v(x) = \frac{F.v_0(x)}{F_{cr} - F} \quad (2.15)$$

où  $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$  est la charge critique d'Euler. Le moment fléchissant dans la poutre s'exprime également en fonction de cette charge critique par :

$$M(x) = -Fv_0(x) \frac{I}{1 - F/F_{cr}} = M_{lin}(x) \frac{I}{1 - F/F_{cr}} \quad (2.16)$$

Le terme  $\frac{I}{1 - F/F_{cr}}$  s'appelle facteur d'amplification du second ordre. On remarque sur

cette formule que le moment fléchissant  $M(x)$  devient infini lorsque la charge de compression  $F$  s'approche de la charge critique d'Euler  $F_{cr}$ .

On remarquera également que le moment fléchissant total  $M(x)$  peut aussi s'écrire sous la forme :

$$M(x) = M_{lin}(x) + M_{nl}(x) = M_{lin}(x) + M_{lin}(x) \frac{F}{F - F_{cr}} \quad (2.17)$$

mettant en évidence le rôle de la partie non-linéaire  $M_{nl}$  dans le critère de stabilité.

Pour un comportement non-linéaire de poutres en béton armé, une démarche analogue sera adaptée au paragraphe 2.4.4.

## 2.3 Modélisation du comportement du béton armé

Les structures que l'on se propose d'étudier sont réalisées en béton armé, matériau au comportement complexe de par son hétérogénéité et des comportements mécaniques très différents de ses constituants. Nous allons donc présenter les lois de comportement retenues pour le béton et l'acier, ainsi que le processus d'homogénéisation adopté pour l'obtention du comportement homogène équivalent.

### 2.3.1 Comportement du béton

Le béton présente un comportement différent en traction et en compression. Une représentation de ce comportement est donnée par la courbe contrainte-déformation ci-dessous :

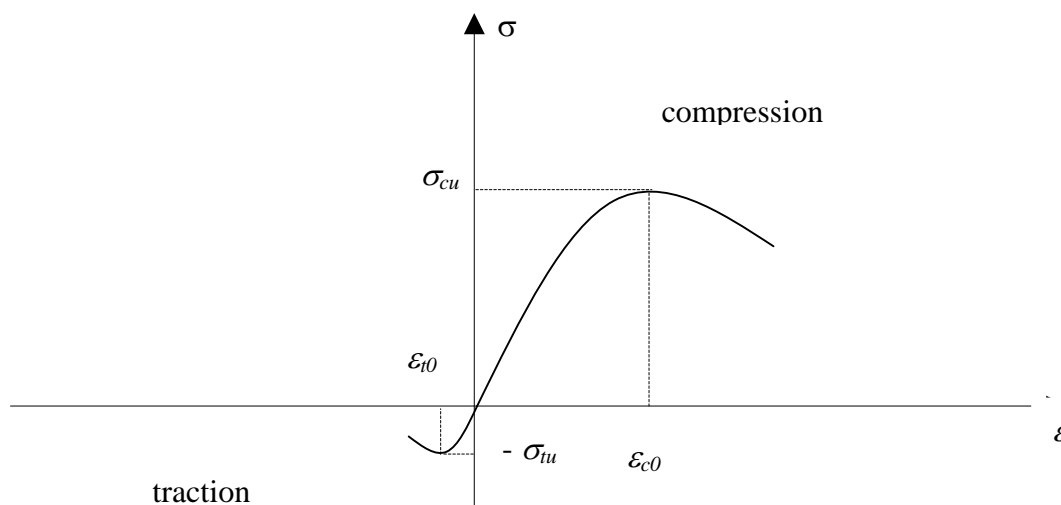


Figure 2. 4 - Diagramme contrainte-déformation du béton

Cette courbe se caractérise par un maximum de contrainte de compression  $\sigma_{cu}$  mesurée pour une déformation  $\varepsilon_{c0}$ , ainsi qu'une faible résistance à la traction dont le pic noté  $\sigma_{tu}$  est mesuré pour une déformation  $\varepsilon_{t0}$ .



Différents modèles existent pour représenter le comportement du béton [NAI90 ROB99]. Nous adoptons ici la loi parabole-rectangle retenue par le règlement français BAEL 91 [PER92]. Elle modélise le comportement en compression du béton, le comportement en traction étant négligé. Cette loi admet une partie parabolique pour les déformations inférieures à la déformation  $\varepsilon_{c0}$  correspondant au pic de contrainte  $\sigma_{cu}$ . Au-delà de ce pic la contrainte est supposée constante jusqu'à une déformation ultime  $\varepsilon_{cu}$ , figure 2.5.

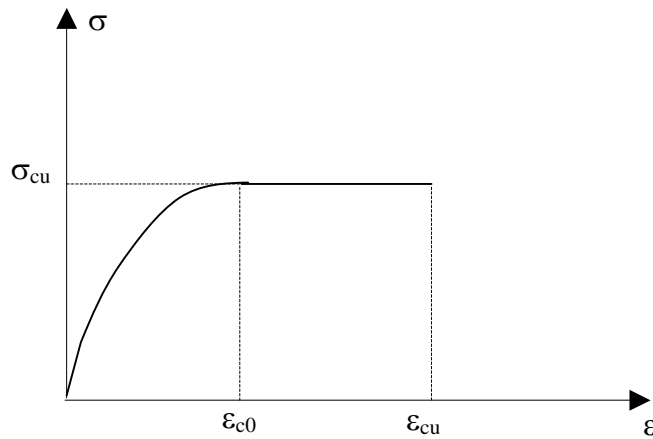


Figure 2. 5 - Loi parabole-rectangle

Ce comportement élasto-plastique non-linéaire est modélisé par la loi suivante :

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_{cu} \left[ 1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{c0})^2}{\varepsilon_{c0}^2} \right] & \text{pour } \varepsilon \in [0, \varepsilon_{c0}] \\ \sigma_{cu} & \text{pour } \varepsilon \in ]\varepsilon_{c0}, \varepsilon_{cu}] \end{cases} \quad (2.18)$$

### 2.3.2 Comportement de l'acier

L'acier possède un comportement symétrique en traction et en compression, décomposé en une partie élastique linéaire et un partie plastique non-linéaire. Une représentation de ce comportement est donnée par la figure 2.6.

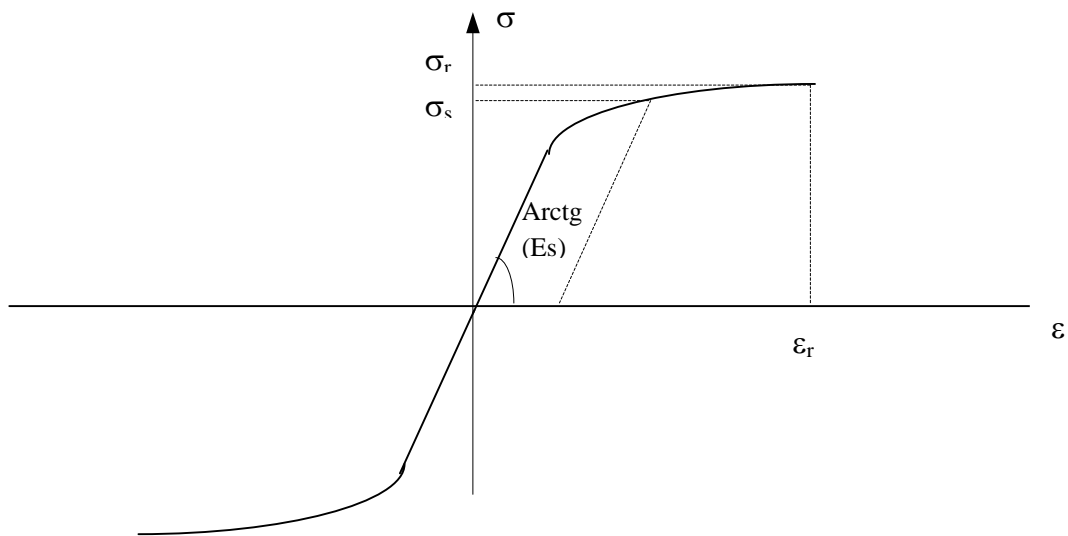


Figure 2. 6 - Diagramme contrainte-déformation des aciers

où  $\sigma_s$  est la limite élastique, et  $\sigma_r$  et  $\varepsilon_r$  les contrainte et déformation à rupture.

En pratique, le comportement des aciers adopté ici, conformément toujours au règlement français BAEL 91, est supposé élastoplastique parfait. Le diagramme correspondant est donné sur la figure 2.7 :

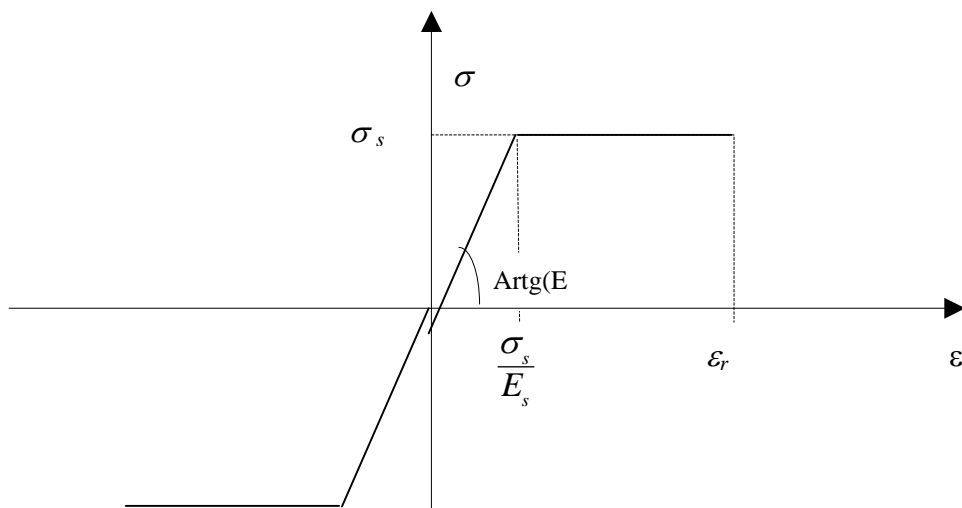


Figure 2. 7 - Loi élastoplastique parfaite

Cette loi, avec un palier d'écoulement plastique pour la limite élastique  $\sigma_s$ , s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = E_s \varepsilon & \text{pour } 0 \leq \varepsilon < \frac{\sigma_s}{E_s} \\ \sigma = \sigma_s & \text{pour } \varepsilon \geq \frac{\sigma_s}{E_s} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

### 2.3.3 Processus d'homogénéisation

Les structures étudiées ici étant réalisées en béton armé, nous présentons la démarche adoptée pour déterminer le comportement homogène équivalent de ces structures qui apparaît dans les lois constitutives introduites au paragraphe 2.2.4. Cette démarche repose sur un processus d'homogénéisation simplifié présenté ici pour des comportements élastiques linéaires des constituants étudiés sous l'hypothèse des petites perturbations.

Pour une poutre composée de deux constituants, dont l'adhérence est supposée parfaite, les efforts généralisés s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) = \iint_{A(x)} \sigma \, dydz = \iint_{A_c} \sigma \, dydz + \iint_{A_s} \sigma \, dydz , \\ V(x) = \iint_{A(x)} \tau_y \, dydz = \iint_{A_c} \tau_y \, dydz + \iint_{A_s} \tau_y \, dydz , \\ M(x) = \iint_{A(x)} y \sigma \, dydz = \iint_{A_c} -y \sigma \, dydz + \iint_{A_s} -y \sigma \, dydz . \end{array} \right. \quad (2.20)$$

où  $A_c$  et  $A_s$  représentent les aires occupées respectivement par les matériaux béton et acier.

En injectant les lois de Hooke pour les deux constituants supposés élastiques linéaires, on obtient, en hypothèse des petites perturbations pour une section droite symétrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) = E_c \iint_{A_c} \frac{du(x)}{dx} dydz + E_s \iint_{A_s} \frac{du(x)}{dx} dydz, \\ V(x) = G_c \iint_{A_c} \left( \frac{dv(x)}{dx} - \theta(x) \right) dydz + G_s \iint_{A_s} \left( \frac{dv(x)}{dx} - \theta(x) \right) dydz \\ M(x) = E_c \iint_{A_c} y^2 \frac{d\theta(x)}{dx} dydz + E_s \iint_{A_s} y^2 \frac{d\theta(x)}{dx} dydz \end{array} \right. \quad (2.21)$$

où  $E_c$  et  $E_s$  désignent les modules d'Young des matériaux béton et acier et  $G_c$  et  $G_s$  les modules respectifs de cisaillement.

On obtient alors les lois de comportement élastiques équivalentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) = E_{\acute{e}q} A \frac{du(x)}{dx}, \\ V(x) = G_{\acute{e}q} A \left( \frac{dv(x)}{dx} - \theta(x) \right) \\ M(x) = E_{\acute{e}q} I_{\acute{e}q} \frac{d\theta(x)}{dx} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

où  $E_{\acute{e}q}$ ,  $G_{\acute{e}q}$  et  $I_{\acute{e}q}$  sont respectivement les modules d'Young, de cisaillement et moment quadratique équivalents définis par les relations suivantes [GAY 89]

$$E_{\acute{e}q} = \frac{1}{A} (E_c A_c + E_s A_s), \quad G_{\acute{e}q} = \frac{1}{A} (G_c A_c + G_s A_s) \quad \text{et} \quad I_{\acute{e}q} = \frac{I}{E_{\acute{e}q}} (E_c I_{zc} + E_s I_{zs}) \quad (2.23)$$

où  $A = A_c + A_s$  représente l'aire réelle de la section droite.

### 2.3.4 Comportement homogène équivalent du béton armé

La démarche présentée au paragraphe précédent est ici appliquée pour obtenir le comportement homogène équivalent d'une poutre en béton armé. Le comportement du béton est maintenant considérée non-linéaire et donné par la loi parabole-rectangle définie au paragraphe 2.3.1. On l'utilise ici en écrivant la partie parabolique de l'équation (2.18) sous la forme :

$$\begin{cases} \sigma = E_1 \varepsilon + E_2 \varepsilon^2 \\ \varepsilon = \varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx}(x) - y \frac{d\theta}{dx}(x) \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\text{avec } E_1 = 2 \frac{\sigma_{cu}}{\varepsilon_{c0}} \quad , \quad E_2 = -\frac{\sigma_{cu}}{\varepsilon_{c0}^2} \quad .$$

En intégrant cette loi dans les relations (2.21), on obtient, pour l'effort normal et le moment fléchissant, les relations de comportement homogénéisées non-linéaires dans le cas d'une section droite symétrique :

$$\begin{cases} N(x) = E_{\acute{e}q} A \frac{du}{dx} + E_2 \left[ A_c \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + I_{zc} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right], \\ M(x) = E_{\acute{e}q} I_{\acute{e}q} \frac{d\theta}{dx} + 2E_2 I_{zc} \frac{du}{dx} \frac{d\theta}{dx} \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\text{Avec : } E_{\acute{e}q} = \frac{1}{A} (E_1 A_c + E_s A_s) \quad \text{et} \quad I_{\acute{e}q} = \frac{1}{E_{\acute{e}q}} (E_1 I_{zc} + E_s I_{zs})$$

Ces lois de comportement peuvent s'écrire formellement sous la forme matricielle suivante :

$$[\mathfrak{R}(x)] = [H(\mathfrak{N})][\mathfrak{N}(x)] \quad (2.26)$$

où

$$[\mathfrak{R}(x)] = \begin{bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{N}(x)] = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx}(x) \\ \frac{d\theta}{dx}(x) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

## 2.4 Approche incrémentale de la stabilité de poutres élancées en béton armé

L'étude de la stabilité de structures en béton armé nécessite de prendre en compte simultanément les deux non-linéarités géométrique et matérielle décrites précédemment. Dans cette optique, nous avons choisi d'étudier ces structures à l'aide d'une approche incrémentale.

La résolution du problème initial non-linéaire est ainsi approchée par les résolutions successives de problèmes auxiliaires linéaires.

Pour chaque incrément de chargement, le processus est initialisé à l'aide d'un calcul classique d'élasticité linéaire en petites perturbations. Les déformations réelles dans le béton sont ensuite corrigées, comme présenté au paragraphe 2.4.1, à l'aide d'un algorithme itératif de Newton-Raphson afin de prendre en compte le comportement non-linéaire du matériau. Les déformations ainsi obtenues permettent d'actualiser les caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure comme présenté au paragraphe 2.4.2 ainsi que la configuration déformée en vue d'étudier l'équilibre au pas de chargement suivant [PRA97]. Cette dernière réactualisation est réalisée ici à l'aide des formules de Bresse présentées au paragraphe 2.4.3.

Pour chaque incrément, la stabilité de l'équilibre atteint est testée, comme présenté au paragraphe 2.4.4, à travers la convergence des moments du second ordre.

### 2.4.1 Détermination itérative des déformations réelles des poutres en béton armé

Pour chaque incrément de charge, selon la description Lagrangienne Actualisée retenue, le procédé itératif de résolution de l'équilibre est initialisé à l'aide d'un calcul classique sous l'hypothèse des petites perturbations, les constituants étant supposés élastiques linéaires isotropes. Cette première étape fournit une évaluation des efforts résultants en chaque point de la ligne moyenne des poutres en béton armé. Ces efforts seront dans la suite notés  $N_{ext}$  et  $M_{ext}$ . Ils sont reliés aux déformations longitudinale et angulaire par l'intermédiaire des modules de rigidités équivalents (2.25). Ces efforts vont ensuite être utilisés dans un second processus itératif afin de calculer les déformations réelles dans le béton armé, compte-tenu du comportement non-linéaire des constituants.

Ce processus de détermination des déformations réelles engendrées dans les poutres en béton armé de comportement non-linéaire est présenté ci-dessous. Le principe est d'annuler le résidu constitué par la différence entre les efforts internes développés dans la structure  $\{F_{int}\}$  et les efforts extérieurs appliqués  $\{F_{ext}\}$  :

$$R = \{F_{int}\} - \{F_{ext}\} \quad (2.28)$$

où  $F_{ext} = \begin{Bmatrix} N_{ext} \\ M_{ext} \end{Bmatrix}$  est le vecteur qui résulte de la phase d'initialisation.

D'après les notations introduites (2.26), le résidu est une fonction non-linéaire des déformations, et s'écrit encore :

$$R(\mathfrak{N}) = [H(\mathfrak{N})][\mathfrak{N}(x)] - \{F_{ext}\} \quad (2.29)$$

Selon la démarche de la méthode d'itérations linéaires présentée au paragraphe 4.3 du chapitre I, si on note  $\mathfrak{N}^i$  une approximation supposée connue de la déformation à l'itération  $i$ , les déformations à l'étape suivante  $i+1$  sont recherchées telles que :

$$R(\mathfrak{N}^{i+1}) = 0 \quad (2.30)$$

Un développement en série de Taylor permet d'approcher le système ci-dessus par la résolution de :

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial \mathfrak{N}}(\mathfrak{N}^i) \right] (\mathfrak{N}^{i+1} - \mathfrak{N}^i) = -R(\mathfrak{N}^i) = \{F_{ext}\} - [H(\mathfrak{N}^i)](\mathfrak{N}^i) \quad (2.31)$$

qui s'écrit encore :

$$\mathfrak{N}^{i+1} = \mathfrak{N}^i + \overline{H}^{-1} [\{F_{ext}\} - [H(\mathfrak{N}^i)](\mathfrak{N}^i)] \quad (2.32)$$

où  $\overline{H} = \frac{\partial R}{\partial \mathfrak{N}}(\mathfrak{N}^i) = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathfrak{N}}(\mathfrak{N}^i)$  est la matrice tangente.

D'après les notations (2.26), cette matrice tangente se détermine par la relation suivante :

$$\overline{H}(\mathfrak{N}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \delta u} & \frac{\partial N}{\partial \delta \theta} \\ \frac{\partial M}{\partial \delta u} & \frac{\partial M}{\partial \delta \theta} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

où l'on a adopté les notations suivantes pour les déformations :

$$\delta u = \frac{du}{dx}(x) \quad \text{et} \quad \delta \theta = \frac{d\theta}{dx}(x). \quad (2.34)$$

Compte-tenu des relations (2.25), cette matrice tangente s'écrit pour des poutres en béton armé de sections droites symétriques :

$$\overline{H}(\mathfrak{N}) = \begin{bmatrix} E_{eq}A + 2E_2A_c\delta u & 2E_2I_c\delta\theta \\ 2E_2I_c\delta\theta & E_{eq}I_{eq} + 2E_2I_c\delta u \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Ce choix de la matrice tangente correspond à une recherche des déformations réelles dans le matériau homogène de comportement équivalent au béton armé à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson, l'opérateur tangent étant réactualisé à chaque incrément de déformation  $\mathfrak{N}^i$ . Pour un cas scalaire, ce schéma itératif de Newton-Raphson peut être illustré par la figure 2.8 :

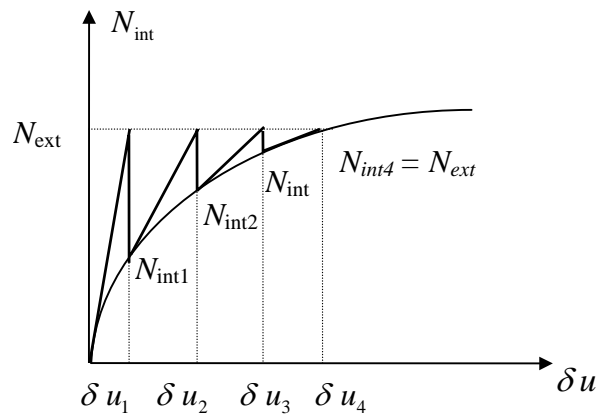


Figure 2. 8 - Méthode itérative illustrée dans le cas d'une seule variable

On notera dans la suite  $\mathfrak{N}_r$  les déformations réelles dans la poutre obtenues à la convergence du processus itératif de Newton-Raphson avec :

$$\mathfrak{N}_r = \begin{Bmatrix} \delta u_r \\ \delta \theta_r \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$



Ces déformations étant calculées, elles sont ensuite utilisées pour déterminer les nouvelles caractéristiques géométriques et mécaniques de chaque section déformée ainsi que les déplacements réels en tout point de la structure. Ces déplacements permettent alors d'actualiser la géométrie de la configuration déformée intermédiaire suivante qui sert de référence pour la détermination de la nouvelle position d'équilibre. On présente dans la suite ces deux phases d'actualisation des caractéristiques et de la déformée.

### 2.4.2 Actualisation des caractéristiques géométriques et mécaniques

La connaissance des déformations réelles  $\varepsilon_r$  dans chaque section droite permet de discerner les parties tendues des parties sollicitées en compression. Dans la mesure où l'on a choisi, comme dans les règlements de béton armé, de ne pas prendre en compte le comportement en traction du béton, les zones tendues dans chaque section sont ignorées dans le processus de réactualisation du comportement. C'est-à-dire que les aires  $A_c$  et moments quadratiques  $I_c$  correspondant aux zones de béton comprimées seules vont décroître au fur et à mesure des étapes du processus incrémental de chargement [ANG73]. Par ailleurs, les déformations réelles dans chaque section droite permettent d'actualiser le comportement non-linéaire du béton. Ces déformations permettent de calculer, par la loi parabole-rectangle retenue, le module d'Young du matériau béton utilisé pour l'incrément de charge suivant. Avec les notations (2.24), ce module correspond à un module tangent  $\bar{E}_b$  donné par la relation suivante :

$$\bar{E}_b = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E_1 + E_2 \varepsilon_r \quad (2.37)$$

avec

$$\varepsilon_r = \delta u_r - y \delta \theta_r \quad (2.38)$$

Par conséquent, le comportement équivalent des structures en béton armé donné par les relations (2.23) peut être réévalué pour chaque pas de chargement. Il s'affaiblira au cours du processus incrémental.

### 2.4.3 Actualisation des configurations déformées

Les déformations réelles et les caractéristiques mécaniques actualisées permettent de calculer les déplacements réels de la structure et ainsi d'actualiser la configuration intermédiaire pour l'étude de l'équilibre au pas de chargement suivant.

Les déplacements réels sont obtenus en intégrant les déformations qui vérifient, d'après (2.22), les lois de comportement suivantes :

$$\begin{cases} \delta u_r = \left( \frac{du(x)}{dx} \right)_r = \frac{N(x)}{E_{\acute{e}q} A}, \\ \delta v_r = \left( \frac{dv(x)}{dx} \right)_r = \frac{V(x)}{G_{\acute{e}q} A'}, \\ \delta \theta_r = \left( \frac{d\theta(x)}{dx} \right)_r = \frac{M(x)}{E_{\acute{e}q} I_{\acute{e}q}}, \end{cases} \quad (2.39)$$

où la relation de comportement sur l'effort tranchant  $V$  a été modifiée, suivant l'usage [CRA97], en introduisant la section réduite  $A'$ . En pratique, le calcul effectif de cette section réduite  $A'$  n'est pas toujours aisé et il est alors usuel de conserver, dans les applications, l'aire de la section droite  $A$ . Les déplacements ainsi obtenus dans un repère propre à la poutre sont ensuite projetés dans un repère général global. Cette démarche conduit aux formules générales de Bresse [OUI91] classiques en Résistance Des Matériaux. Nous les présentons ici dans le cas d'une poutre à plan moyen et chargée dans son plan.

Soit  $G_1G_2$  un tronçon de la ligne moyenne de la poutre. Un point courant  $G$  de ce tronçon est repéré par ses coordonnées  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  dans le repère global  $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  et par son abscisse curviligne  $s$  dans le repère local  $(G, \vec{\tau}, \vec{n}, \vec{k})$  de la ligne moyenne ( $L$ ) (figure 2.9).

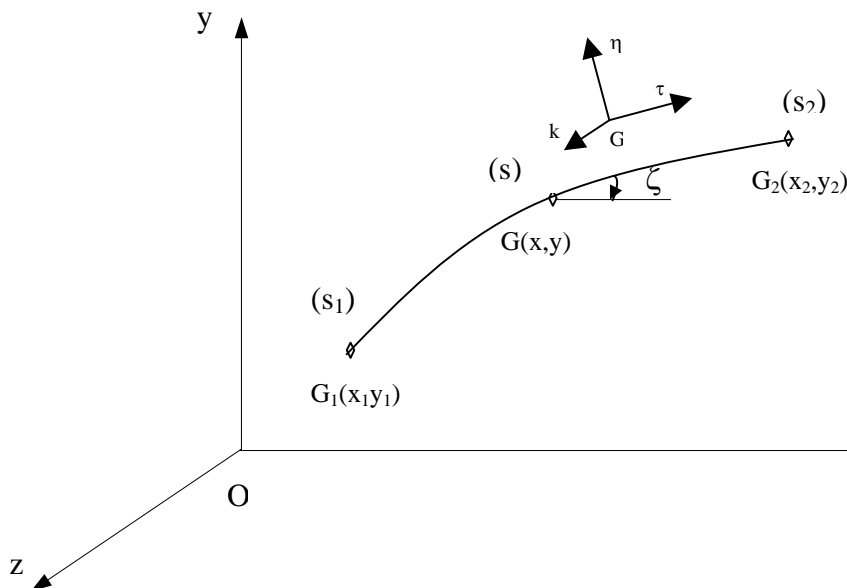


Figure 2. 9 - Description géométrique d'un tronçon déformé

Les formules de Bresse permettent d'exprimer, dans le repère global, les translations et rotation en  $G_2$  en fonction des déplacements au centre de gravité  $G_1$  par les relations suivantes :

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \hat{\theta}_1 \vec{z} \wedge \overrightarrow{G_1 G_2} + \int_{G_1 \hat{G}_2} \left( -\frac{N}{E_{\acute{e}q} A} \vec{\tau} + \frac{V}{G_{\acute{e}q} A'} \vec{n} \right) ds + \int_{G_1 \hat{G}_2} \frac{M}{E_{\acute{e}q} I_{\acute{e}q}} \vec{y} \wedge \overrightarrow{G G_2} ds$$

et

$$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_1 + \int_{G_1 \hat{G}_2} \frac{M}{E_{\acute{e}q} I_{\acute{e}q}} ds \quad (2.40)$$

où  $\vec{u}$  représente le vecteur des translations de composantes  $(\hat{u}, \hat{v})$  dans le repère global.

Soit encore :

$$\begin{aligned} \hat{u}_2 &= \hat{u}_1 - \hat{\theta}_1 (\hat{y}_2 - \hat{y}_1) + \int_{G_1 \hat{G}_2} \frac{N}{E_{\acute{e}q} A} \cos \zeta ds - \int_{G_1 \hat{G}_2} \frac{V}{G_{\acute{e}q} A'} \sin \zeta ds + \int_{G_1 \hat{G}_2} \frac{M}{E_{\acute{e}q} I_{\acute{e}q}} (\hat{y}_2 - \hat{y}) ds \\ \hat{v}_2 &= \hat{v}_1 - \hat{\theta}_1 (\hat{x}_2 - \hat{x}_1) + \int_{G_1 \hat{G}_2} \frac{N}{E_{\acute{e}q} A} \sin \zeta ds + \int_{G_1 \hat{G}_2} \frac{V}{G_{\acute{e}q} A'} \cos \zeta ds + \int_{G_1 \hat{G}_2} \frac{M}{E_{\acute{e}q} I_{\acute{e}q}} (\hat{x}_2 - \hat{x}) ds \end{aligned}$$

et

$$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_1 + \int_{G_1 \hat{G}_2} \frac{M}{E_{\acute{e}q} I_{\acute{e}q}} ds \quad (2.41)$$

Une fois ces déplacements réels au centre de gravité calculés, ils sont introduits dans la cinématique (2.1) de la poutre afin d'actualiser la configuration déformée. Cette dernière servira ensuite de géométrie initiale pour l'incrément de chargement suivant.

#### 2.4.4 Analyse de la stabilité des configurations intermédiaires

Pour chaque incrément de charge, la stabilité de la configuration déformée atteinte est testée. Cette vérification porte sur l'intensité des moments fléchissants comme présenté au paragraphe 2.2.6. La partie linéaire du moment fléchissant  $M_{lin}$  n'étant liée

qu'au pas de chargement, le test de stabilité ne portera que sur la partie non-linéaire  $M_{nl}$  liée aux termes de grands déplacements par :

$$M_{nl}(x) = -N(x).v_r(x) \quad (2.42)$$

Les déplacements réels obtenus fournissent donc une valeur de référence notée  $M_{nl}^0$  pour les moments du second ordre. Cette configuration d'équilibre est ensuite perturbée, comme présenté au chapitre 1, par une suite de champs de déplacement  $(\Delta v^j)$ , et l'influence de ces perturbations sur les moments du second ordre est évaluée de manière itérative. Ainsi à une étape  $(j+1)$  de ce processus itératif de perturbation, le moment du second ordre vérifie :

$$M_{nl}^{j+1} = -Nv^{j+1} = -N(v^j + \Delta v^j) \quad (2.43)$$

soit

$$M_{nl}^{j+1} = M_{nl}^j - N\Delta v^j \quad (2.44)$$

La configuration déformée de départ, d'indice 0, sera considérée comme stable si les accroissements des moments du second ordre dans ce schéma itératif se stabilisent, à savoir si :

$$\frac{M_{nl}^{j+1} - M_{nl}^j}{M_{nl}^0} \rightarrow 0 \quad (2.45)$$

On notera que , en pratique, pour chaque étape  $j$  de ce processus itératif de perturbation, il est nécessaire d'obtenir les déplacements réels  $v^j$ . Pour cela, on conserve l'approche Lagrangienne Actualisée adoptée jusqu'à présent. Il est donc nécessaire, du fait de la non-linéarité matérielle, de procéder à toutes les étapes du processus incrémental de calcul d'équilibre présentées dans le paragraphe 4, à savoir : détermination itérative des déformations réelles par la méthode de Newton-Raphson, actualisation des caractéristiques géométriques et mécaniques et actualisation des configurations déformées intermédiaires.

## 2.5 Conclusion

L'analyse du flambement des structures élancées en béton armé est un problème qui nécessite la prise en compte non seulement de la non-linéarité géométrique mais aussi de la non-linéarité matérielle et du comportement unilatéral du béton [LAB91], [MAZ98]. La prise en compte de la non-linéarité géométrique dans une description Lagrangienne actualisée a permis de mettre en place une analyse non-linéaire de la stabilité utilisant un processus itératif et incrémental. Le critère de stabilité utilisé porte sur le moment du second ordre.

Un processus d'homogénéisation est mis en place pour introduire le comportement du béton armé. Pour cela, une démarche simplifiée pour des comportements élastiques linéaires est présentée dans un premier temps. La non-linéarité matérielle et le comportement unilatéral du béton modélisés par la loi parabole rectangle sont considérés dans un second temps. Le processus d'homogénéisation permet d'obtenir alors les relations de comportement non linéaires homogénéisées d'une section droite en béton armé.

Ces relations de comportement homogénéisées sont ensuite prises en compte dans une approche incrémentale de la stabilité. En effet, pour chaque incrément de charge, le processus est initialisé à l'aide d'un calcul classique d'élasticité linéaire en petites perturbations. Les résultats de ce calcul, en terme d'efforts généralisés, permettent de calculer les déformations réelles dans le béton armé à l'aide d'un algorithme itératif de Newton-Raphson. Celui-ci permet de prendre en compte le comportement non-linéaire du matériau ainsi homogénéisé.

Une fois les déformations réelles dans la section connues, on procède à la réactualisation du comportement et de la géométrie. En effet, les zones tendues des sections sont négligées, le nouveau module d'Young du béton est recalculé et la nouvelle déformée est réévaluée par un calcul des déplacements réels de la structure.

Ces nouvelles données sont prises en compte à deux niveaux différents : elles sont utilisées d'une part, pour l'incrément de charge suivant et d'autre part, dans chaque étape du processus itératif mis en place pour l'analyse de la stabilité.

La méthode de calcul ainsi mise en place sera implémentée dans le code de calcul par éléments finis Systus. La stratégie numérique adoptée est décrite dans la suite, au chapitre 3.

---

<b>Mise en œuvre numérique et validations</b>	<b>54</b>
<b>3.1 Introduction</b>	<b>54</b>
<b>3.2 Implémentation numérique du logiciel</b>	<b>55</b>
3.2.1 Présentation générale	55
3.2.2 Calcul élastique linéaire	57
3.2.3 Traitement de la non-linéarité matérielle	58
3.2.4 Traitement de la non-linéarité géométrique	62
3.2.5 Traitement de la stabilité	64
3.2.4 Les fonctionnalités du logiciel développé	68
<b>3.3 Validations du logiciel développé</b>	<b>68</b>
3.3.1 Poutres élastiques linéaires homogènes	69
3.3.2 Poutres en béton armé	71
3.3.3 Confrontation avec les résultats des tables de Feassel	72
3.3.4 Confrontation avec des résultats expérimentaux	74
3.3.5 Tests de sensibilité aux caractéristiques physiques des poutres	76
a) Influence de l'élancement géométrique	77
b) Influence de l'excentricité	78
c) Influence de la résistance à la compression du béton	78
d) Influence de la position des aciers	79
e) Bilan	79
<b>3.4 Conclusion</b>	<b>81</b>

## Mise en œuvre numérique et validations

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous exposons la stratégie numérique adoptée ainsi que les moyens utilisés pour implémenter la méthode de calcul au flambement des structures élancées en béton armé présentée au Chapitre 2. Cette implémentation s'appuie sur le code de calcul par éléments finis SYSTUS. Ce dernier ne disposant pas de la loi de comportement non linéaire que nous avons retenue pour le matériau béton, l'implémentation a été réalisée en développant un logiciel spécifique pour simuler les non-linéarités matérielle et géométrique. Ce logiciel a été développé en langage SIL propre au code par éléments finis SYSTUS.

Le langage SIL, possédant un ensemble de fonctions d'accès aux structures du code, constitue l'interface de communication avec le code de calcul SYSTUS. Il permet donc de coupler le logiciel développé au code de calcul SYSTUS.

L'utilisation du langage SIL a permis d'implémenter l'ensemble des phases spécifiques au traitement des deux non-linéarités : le calcul itératif des déformations réelles dans les poutres en béton armé, l'actualisation des caractéristiques géométriques et mécaniques des sections droites, les phases de remaillage pour les configurations intermédiaires et le traitement itératif de la stabilité. Le logiciel ainsi réalisé permet de simuler le comportement des structures élancées en béton armé jusqu'à la ruine, que celle-ci intervienne par épuisement des matériaux ou par instabilité de la structure. Ce logiciel constitue donc un outil de prédiction de la charge de ruine pour les différents types de structures élancées en béton armé rencontrées en Génie Civil.

Dans ce chapitre nous présentons, dans une première partie, l'ensemble des organigrammes relatifs à l'implémentation du logiciel et à son intégration dans le code de calcul SYSTUS. La seconde partie est consacrée aux différentes phases de validation menées pour justifier la fiabilité et les performances de l'outil numérique proposé. Ainsi différentes confrontations à des méthodes explicites et expérimentales permettent de

valider les charges de ruine prédites numériquement. De plus, l'analyse de l'influence de certains paramètres géométriques et mécaniques sur la charge critique de flambement complète ces phases de validation.

## **3.2 Implémentation numérique du logiciel**

### **3.2.1 Présentation générale**

La description retenue pour la simulation du comportement des structures élancées en béton armé est une approche Lagrangienne Actualisée. Le chargement est donc imposé par incréments successifs jusqu'à ce que la ruine de la structure soit détectée. Chacun de ces incréments sera noté  $\Delta P_i$ . Pour chacun de ces pas de chargement, les étapes caractéristiques se déroulent suivant l'organigramme présenté ci-dessous :



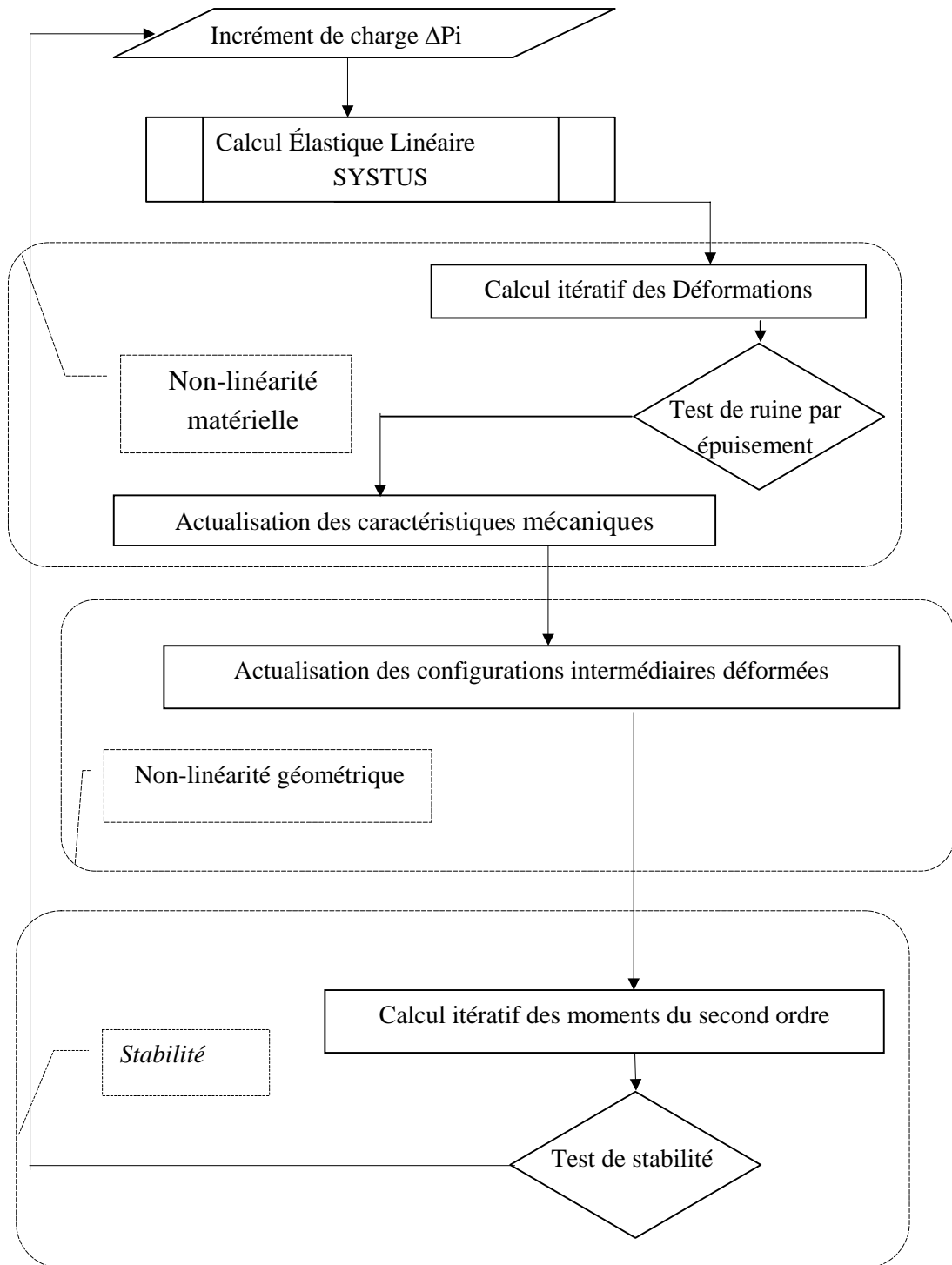


Figure 3. 1 - Algorithme de présentation du logiciel

### 3.2.2 Calcul élastique linéaire

Pour chaque incrément de charge, un premier calcul élastique linéaire par la méthode des éléments finis est effectué à l'aide de SYSTUS.

La structure est discrétisée en éléments finis de poutres unidimensionnelles à 2 nœuds, chaque nœud possédant trois degrés de liberté : une translation longitudinale  $u_n$ , une translation verticale  $v_n$ , et une rotation dans le plan  $\theta_n$  (figure 3.2). On notera  $L$  la longueur de chaque élément.

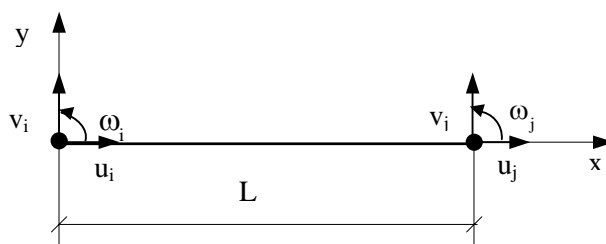


Figure 3. 2 - Degrés de liberté de l'élément fini à deux nœuds

L'élément fini choisi repose sur la cinématique présentée au chapitre 2 dans laquelle, de façon classique, la déformation de cisaillement est supposée négligeable devant celle de flexion. Le vecteur des inconnues nodales  $\{U_n^i\}$  s'écrit donc sous la forme :

$$\{U_n^i\} = \{u_n^i, v_n^i, \theta_n^i\} \quad (3.1)$$

A chaque incrément de charge, ce vecteur des inconnues nodales est obtenu par résolution du système linéaire matriciel suivant :

$$[K_l^i] \{U_n^i\} = \{F^{i-1}\} + \{\Delta F^i\} \quad (3.2)$$

où  $[K_l^i]$  est la matrice de rigidité globale et le second membre, le vecteur force incrémenté à chaque pas de chargement.

La matrice  $[K_l^i]$  de ce système résulte de l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires  $[K_{elem}^i]$  calculées à partir des modules équivalents actualisés introduits au chapitre 2. Chacune d'elles a pour expression :

$$\left[ K_{\text{elem}}^i \right] = \begin{bmatrix} \frac{E_{\text{eq}}^i A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E_{\text{eq}}^i A}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12E_{\text{eq}}^i I_{\text{eq}}^i}{L^3} & \frac{6E_{\text{eq}}^i I_{\text{eq}}^i}{L^2} & 0 & -\frac{12E_{\text{eq}}^i I_{\text{eq}}^i}{L^3} & \frac{6E_{\text{eq}}^i I_{\text{eq}}^i}{L^2} \\ & & \frac{4E_{\text{eq}}^i I_{\text{eq}}^i}{L} & 0 & -\frac{6E_{\text{eq}}^i I_{\text{eq}}^i}{L^2} & \frac{2E_{\text{eq}}^i I_{\text{eq}}^i}{L} \\ & & & \frac{E_{\text{eq}}^i A}{L} & 0 & 0 \\ & \text{Symétrique} & & & \frac{12E_{\text{eq}}^i I_{\text{eq}}^i}{L^3} & -\frac{6E_{\text{eq}}^i I_{\text{eq}}^i}{L^2} \\ & & & & & \frac{4E_{\text{eq}}^i I_{\text{eq}}^i}{L} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Cette première étape fournit les efforts généralisés de référence  $N_{\text{ext}}^i$ ,  $V_{\text{ext}}^i$  et  $M_{\text{ext}}^i$  nécessaire au calcul des déformations réelles de chaque section en béton armé. Ce calcul est réalisé à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson présenté au paragraphe suivant.

### 3.2.3 Traitement de la non-linéarité matérielle

Il s'agit de prendre en compte la non-linéarité matérielle due à la présence du matériau béton dans les poutres étudiées. La loi de comportement retenu pour le béton en compression, conformément au règlement français BAEL91, est la loi parabole rectangle présentée au paragraphe 2.3.1 :

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_{cu} \left[ 1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{c0})^2}{\varepsilon_{c0}^2} \right] & \text{pour } \varepsilon \in [0, \varepsilon_{c0}] \\ \sigma_{cu} & \text{pour } \varepsilon \in ]\varepsilon_{c0}, \varepsilon_{cu}] \end{cases} \quad (3.4)$$

Selon ce règlement, l'expression de la contrainte au pic  $\sigma_{cu}$  est prise sous la forme :

$$\sigma_{cu} = \frac{0.85 f_{cj}}{K_c \gamma_c} \quad (3.5)$$

où  $f_{cj}$  est la résistance caractéristique à la compression à j jours,  $K_c$  un coefficient tenant compte de la durée d'application des charges et  $\gamma_c$  un coefficient de sécurité. En

pratique, cette résistance à la compression est prise à 28 jours, le coefficient de sécurité à 1.5 et les déformations critiques  $\epsilon_{c0}$  et  $\epsilon_{cu}$  à  $2.10^{-3}$  et  $3.5.10^{-3}$ .

Suivant ce même règlement, le comportement des aciers est supposé élasto-plastique parfait comme présenté au paragraphe 2.3.2. La limite élastique  $\sigma_e$  est pondérée par un coefficient de sécurité  $\gamma_s$  telle que :

$$\sigma_s = \frac{\sigma_e}{\gamma_s} \quad (3.6)$$

Les déformations à rupture de l'acier, quant à elles, sont limitées à la valeur règlementaire de  $\epsilon_r = 10.10^{-3}$ .

Ces valeurs caractéristiques des déformations  $\epsilon_{cu}$  et  $\epsilon_r$  gouvernent le test de ruine par épuisement effectué après le calcul itératif des déformations réelles dans la poutre en béton armé. Ainsi, dès que l'un des deux matériaux a atteint sa déformation limite, on considère que la structure est ruinée par épuisement de la section correspondante. La charge limite supportable par la structure est donc celle correspondant à la charge imposée à l'incrément précédent.

Les déformations réelles sont obtenues à l'aide de l'algorithme itératif de Newton-Raphson présenté au paragraphe 2.4.1. Le ferrailage présent dans les poutres est regroupé en lits d'armatures repérés par leur ordonnée  $y_l$  dans la section droite et leur aire correspondante  $A_{s_l}$  située à chaque niveau  $y_l$ .

Les sections droites ne présentant plus a priori de symétrie, les lois de comportement équivalentes (2.25) données au paragraphe 2.3.4 sont modifiées par la présence de ces armatures suivant :

$$N(x) = E_{\acute{e}q} A \frac{du}{dx} + E_2 \left[ A_c \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + I_c \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] - \sum_l E_s A_{s_l} y_l \left( \frac{d\theta}{dx} \right), \quad (3.7)$$

$$M(x) = E_{\acute{e}q} I_{\acute{e}q} \frac{d\theta}{dx} + 2E_2 I_c \frac{du}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \sum_l E_s A_{s_l} y_l \left( \frac{du}{dx} \right). \quad (3.8)$$

En conséquence la matrice tangente introduite dans le schéma itératif de Newton-Raphson présente des termes hors diagonaux supplémentaires :

$$\overline{H}(\mathbb{N}) = \begin{bmatrix} E_{\acute{e}q} A + 2E_2 A_c \delta u & 2E_2 I_c \delta \theta - \sum_l E_s A_{s_l} y_l \\ 2E_2 I_c \delta \theta - \sum_l E_s A_{s_l} y_l & E_{\acute{e}q} I_{\acute{e}q} + 2E_2 I_c \delta u \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Le calcul itératif est conduit jusqu'à ce que les efforts intérieurs correspondant aux déformations calculées égalisent les efforts extérieurs de référence  $N_{ext}^i$  et  $M_{ext}^i$  issus du calcul élastique linéaire préalable. En pratique, comme présenté au Chapitre 2, la tolérance sur l'écart des déformations entre deux incréments successifs est de 0.1 %.

A convergence de ce processus, les déformations réelles  $\varepsilon_r^i$  obtenues au  $i^{\text{ème}}$  pas de chargement permettent d'actualiser le module d'Young du béton par l'expression (2. 37)

$$\overline{E}_c^i = \frac{\sigma_{cu}}{\varepsilon_{c0}} \left( 2 - \frac{\varepsilon_r^i}{\varepsilon_{c0}} \right) \quad (3.10)$$

Les résultats de l'algorithme de Newton-Raphson permettent d'exprimer les déformations réelles dans chaque section droite par :

$$\varepsilon_r^i(y) = \left( \frac{du}{dx} \right)_r^i - y \left( \frac{d\theta}{dx} \right)_r^i = \delta u_r^i - y \delta \theta_r^i \quad (3.11)$$

Ces déformations permettent ensuite de positionner le nouvel axe neutre dans la section droite par la relation :

$$\tilde{y}^i = h_t + \frac{\delta u_r^i}{\delta \omega_r^i} \quad (3.12)$$

où  $h_t$  est la hauteur initiale de la section droite rectangulaire ( figure 3.3 ). Cette position permet de distinguer la partie tendue de la section droite, et en particulier la proportion correspondante de béton tendu qui sera négligée dans la suite des calculs car considérée comme fissurée.

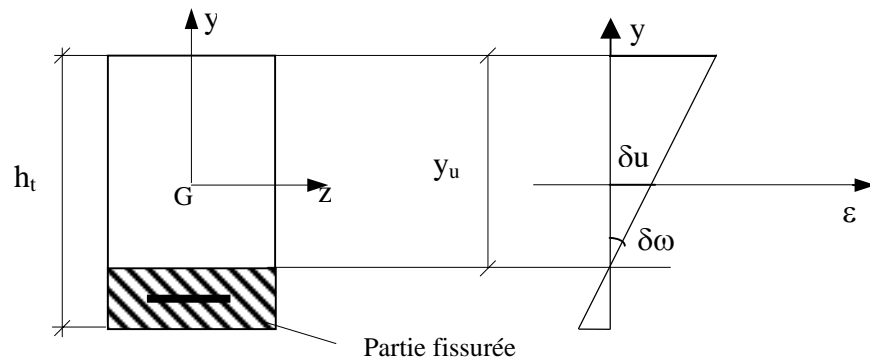


Figure 3. 3 - Axe neutre d'une section fissurée

Cette partie fissurée conduit à réévaluer les caractéristiques géométriques de la partie de la section droite en béton notées pour le pas de chargement ( $i$ ) courant  $A_c^i$  et  $I_c^i$ .

Enfin, en vue du calcul au pas de charge suivant, les modules équivalents de rigidité de traction et de flexion peuvent être actualisés à l'aide des formules (2.23) à partir des nouvelles valeurs de  $\overline{E_c^i}$ ,  $A_c^i$  et  $I_c^i$  :

$$E_{\acute{e}q}^i = \frac{1}{A} \left( \overline{E_c^i} A_c^i + E_s A_s \right) \quad , \quad G_{\acute{e}q}^i = \frac{1}{A} \left( G_c^i A_c^i + G_s A_s \right) \quad \text{et} \quad I_{\acute{e}q}^i = \frac{1}{E_{\acute{e}q}^i} \left( \overline{E_c^i} I_c^i + E_s I_s \right) \quad (3.13)$$

L'ensemble de ces étapes nécessaires au traitement de la non-linéarité matérielle est résumé dans l'organigramme ci-dessous :

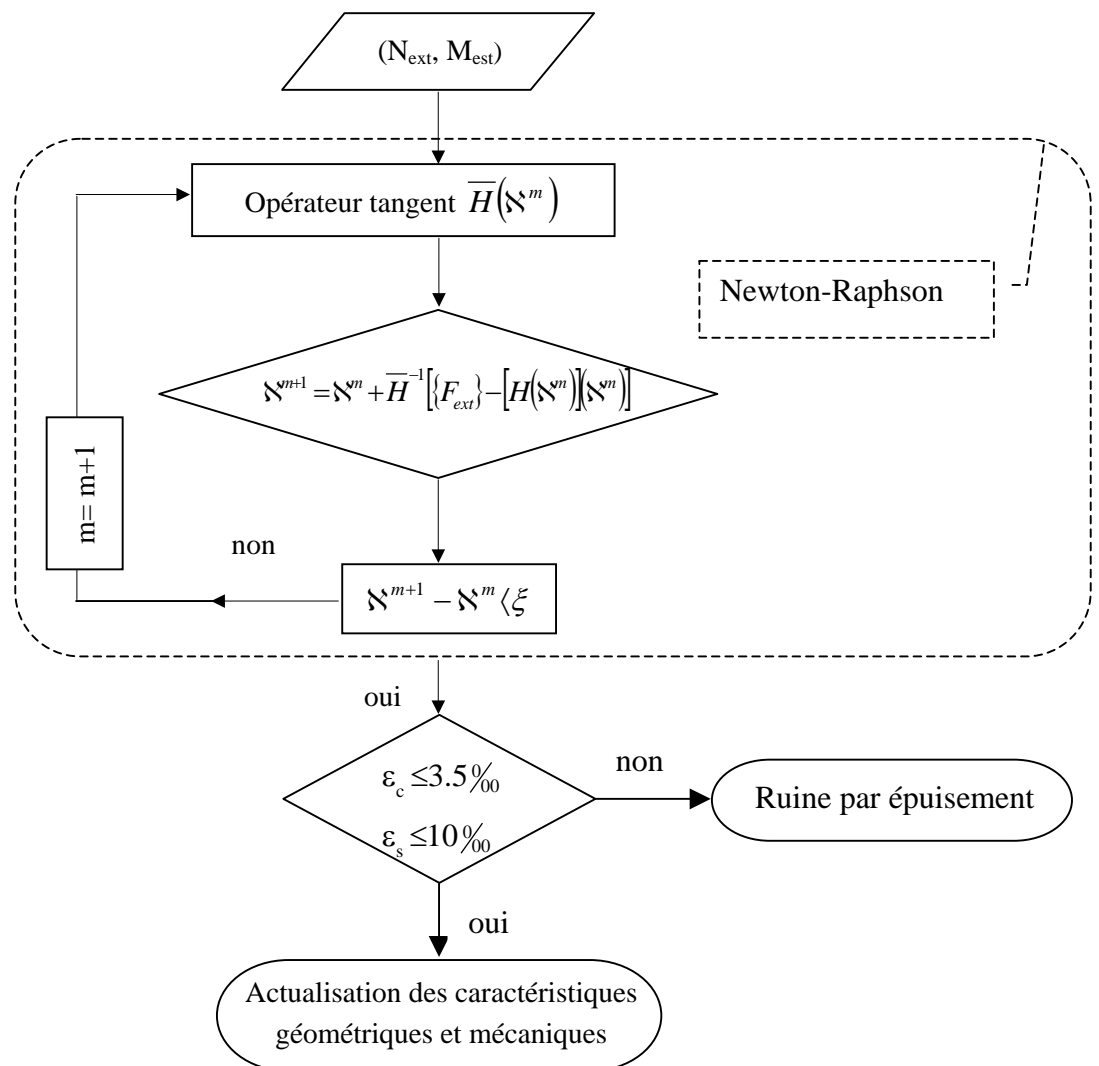


Figure 3. 4 - Algorithme de traitement de la non-linéarité matérielle

### 3.2.4 Traitement de la non-linéarité géométrique

Pour chaque incrément de charge ( $i$ ), les déformations réelles obtenues dans chaque section droite à l'issue de l'algorithme de Newton-Raphson, permettent de calculer les déplacements réels de chacun des nœuds de la structure discrétisée. Le maillage de la structure est réactualisé, chacun des nœuds ( $n$ ) ayant pour nouvelles coordonnées :

$$x_n^{i+1} = x_n^i + u_n^i \quad (3.14)$$

$$y_n^{i+1} = y_n^i + v_n^i \quad (3.15)$$

où les déplacements nodaux sont déterminés à l'aide des formules de Bresse comme présenté au paragraphe 2.4.3 :

$$u_n^i = u_{n-1}^i - \theta_{n-1}^i (y_n - y_{n-1}) + \int_{\text{elem}} \left[ \frac{M^i (y_n - y)}{E_{\text{éq}}^i I_{\text{éq}}^i} + \frac{N^i}{E_{\text{éq}}^i A} \cos \zeta - \frac{T^i}{G_{\text{éq}}^i A} \sin \zeta \right] ds \quad (3.16)$$

$$v_n^i = v_{n-1}^i + \theta_{n-1}^i (x_n - x_{n-1}) + \int_{\text{elem}} \left[ \frac{M^i (x_n - x)}{E_{\text{éq}}^i I_{\text{éq}}^i} + \frac{N^i}{E_{\text{éq}}^i A} \sin \zeta + \frac{T^i}{G_{\text{éq}}^i A} \cos \zeta \right] ds \quad (3.17)$$

$$\theta_n^i = \theta_{n-1}^i + \int_{\text{elem}} \frac{M^i}{E_{\text{éq}}^i I_{\text{éq}}^i} ds \quad (3.18)$$

Les caractéristiques de la section utilisées dans les expressions 3.16, 3.17, et 3.18 sont les valeurs actualisées à la fin du traitement de la non-linéarité matérielle.

En pratique, ces déplacements sont calculés numériquement à l'aide de la formule d'intégration numérique du trapèze [BAT91] :

$$\int_{\text{elem}} f(s) ds = \frac{1}{L_{\text{elem}}} [f_{n+1} - f_n] \quad (3.19)$$

où  $f_n$  et  $f_{n+1}$  représentent les valeurs nodales d'une fonction  $f$  sur un élément fini de longueur  $L_{\text{elem}}$ . Cette phase de réactualisation du maillage de chaque configuration déformée intermédiaire est résumé sur l'organigramme suivant :



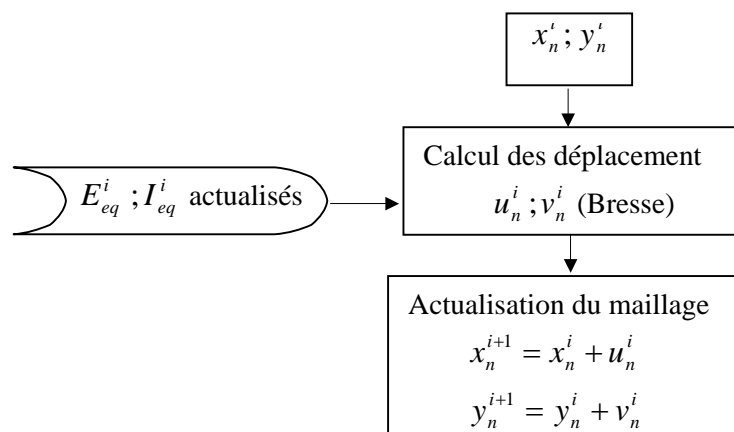


Figure 3. 5 - Procédure d'actualisation du maillage

Une validation de cette implémentation a été effectuée sur un portique en béton armé étudié par W.B. Cranston [CRA65]. Ces résultats sont présentés au paragraphe 4.3.2 du chapitre suivant.

### 3.2.5 Traitement de la stabilité

Pour chaque pas de chargement  $\Delta P_i$ , la stabilité de l'état d'équilibre réel est testée selon le principe itératif présenté au paragraphe 2.4.4 du chapitre 2. Une seconde boucle pour l'analyse de stabilité vient donc s'imbriquer dans celle sur les incréments de chargement. Cet état d'équilibre ( $i$ ) est perturbé en imposant une suite de chargements fictifs engendrant à leur tour une suite de déplacements  $\Delta v_j$ . En pratique, les chargements imposés sont des couples  $M^{i,j}$  intégrant les déplacements fictifs  $\Delta v_{j-1}$  de l'étape précédente :

$$M_{nl}^{i,j} = -Nv^j = -N(v^{j-1} + \Delta v^{j-1}) \quad (3.20)$$

L'état d'équilibre ( $i$ ) sera considéré comme stable si les flèches restent bornées, c'est-à-dire si les perturbations  $\Delta v_j$  tendent vers zéro. Concrètement, les tests numériques sont effectués sur les moments du second ordre qui leur sont associés par la relation récurrente (3.20). La stabilité de l'équilibre sera donc jugée comme vérifiée si ces moments du second ordre convergent vers une valeur finie, c'est-à-dire si :

$$\frac{M_{nl}^{i,j+1} - M_{nl}^{i,j}}{M_{nl}^{i,0}} \rightarrow 0 \quad (3.21)$$

Ce processus itératif est initialisé par la valeur du moment du second ordre correspondant aux déplacements réels générés à l'incrément de charge (i) :

$$M_{nl}^{i,0} = -N^i v_r^i = -N^i v^{i,0} \quad (3.22)$$

A l'étape  $j = I$ , la valeur du moment du second ordre  $M^{i,1}$  est évaluée à l'aide d'un calcul SYSTUS en élasticité linéaire. Les données sont la géométrie correspondant à l'état déformé atteint à l'incrément de charge (i) et le comportement est le comportement équivalent à la fin de l'étape (i) :  $E^{i,eq}$ ,  $G^{i,eq}$  et  $I^{i,eq}$ .

Ce moment  $M^{i,1}$  est ensuite testé par la condition de stabilité :

$$\frac{M_{nl}^{i,1} - M_{nl}^{i,0}}{M_{nl}^{i,0}} < \xi \quad (3.23)$$

où  $\xi$  est une tolérance fixée par l'utilisateur. Dans les applications, la valeur de  $\xi$  retenue était de  $10^{-3}$ .

Si cette condition est vérifiée, l'état d'équilibre (i) est dit stable et la simulation numérique se poursuit par l'étude de l'équilibre de la structure sous le pas de chargement suivant  $\Delta P_{i+1}$ .

Dans le cas contraire, le processus itératif d'étude de la stabilité d'indice  $j$  se poursuit par le calcul des déformations réelles  $\varepsilon_r^{i,1}$  à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson afin de tenir compte du comportement non linéaire du béton. Le comportement équivalent, noté :  $E^{i,1,eq}$ ,  $G^{i,1,eq}$  et  $I^{i,1,eq}$ , peut être alors actualisé ainsi que les déplacements nodaux  $u_n^{i,1}$  et  $v_n^{i,1}$ . Ces derniers permettent d'actualiser la géométrie  $v_r^{i,1}$  de la configuration fictive  $j = I$ . Celle-ci sera la géométrie de départ pour un nouveau calcul SYSTUS correspondant à l'incrément de stabilité suivant  $j = 2$ . Le nouveau chargement fictif imposé pour cet incrément  $j = 2$  est :

$$M_{nl}^{i,1} = -N^i v_r^{i,1} = -N^i v^{i,1} \quad (3.24)$$

Toutes ces étapes sont réitérées jusqu'à la convergence des moments du second ordre, c'est-à-dire jusqu'à ce que le critère :

$$\frac{M_{nl}^{i,j+1} - M_{nl}^{i,j}}{M_{nl}^{i,0}} < \xi \quad (3.25)$$

soit vérifié. L'algorithme retourne alors à l'étude de l'équilibre de la structure au pas de chargement suivant  $\Delta P_{i+1}$ .

Si le test de convergence des moments du second ordre n'est jamais vérifié, le processus de stabilité itère jusqu'à un nombre maximal  $n_{\max}$  d'itérations autorisé par l'utilisateur. L'état d'équilibre étudié ne pouvant être jugé stable, la simulation du comportement de la structure élancée en béton armé s'arrête et le logiciel fournit la charge d'instabilité correspondant au chargement total de l'incrément précédent ( $i-1$ ).

La prévision numérique de la charge de ruine se fait donc par encadrement. La charge critique est comprise entre le dernier incrément de charge pour lequel l'analyse converge (borne inférieure) et l'incrément pour lequel l'analyse diverge (borne supérieure).

Dans les applications présentées, le nombre d'itérations maximal a été limité à  $n_{\max} = 25$ .

L'ensemble de ces étapes nécessaires à l'analyse de stabilité de chaque état d'équilibre est résumé dans l'organigramme ci-dessous :

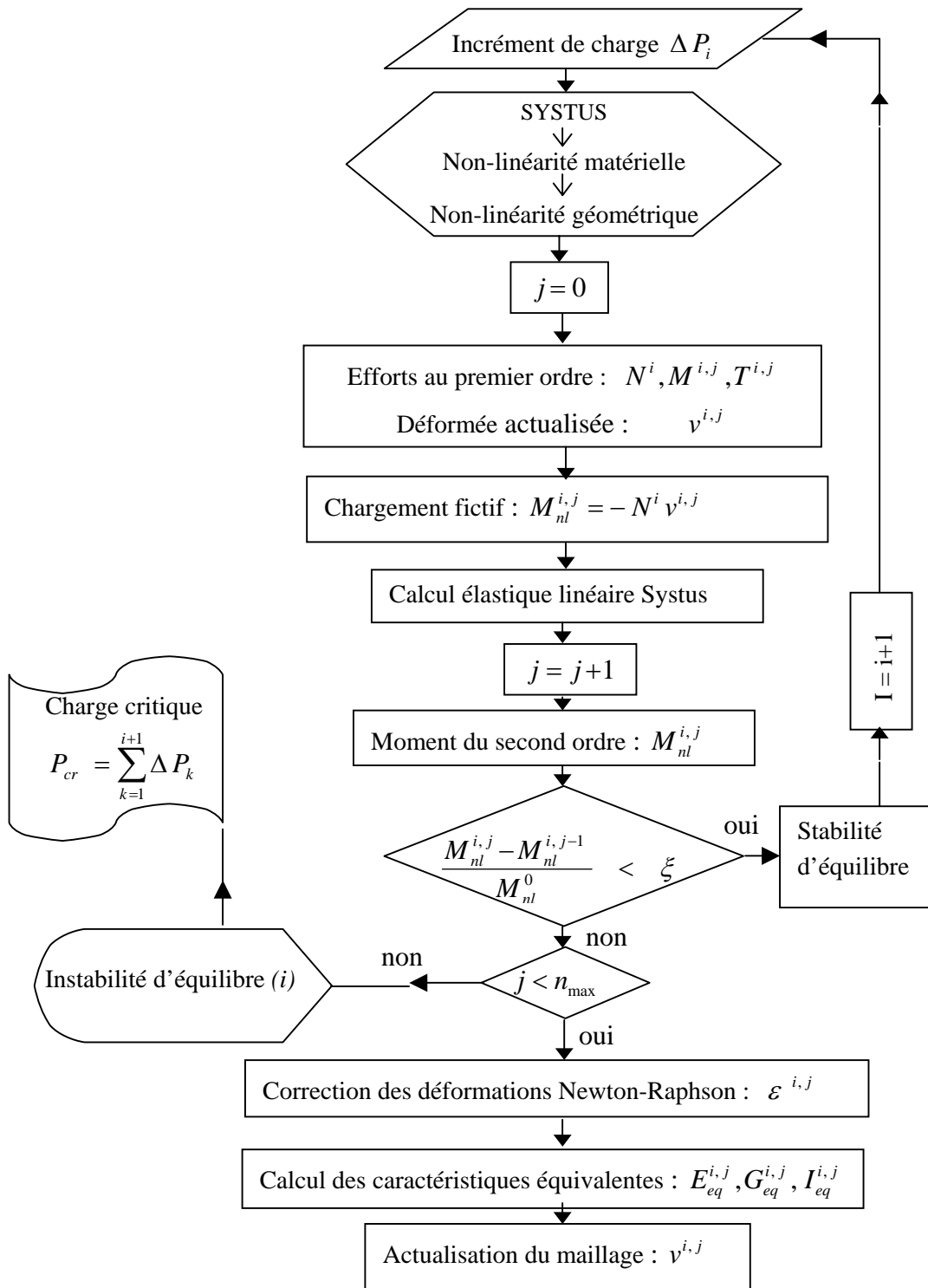


Figure 3. 6 - Algorithme itératif d'instabilité

### 3.2.4 Les fonctionnalités du logiciel développé

Toutes les étapes de calcul présentées précédemment ont été programmées en langage SIL. Ce langage de programmation propre à SYSTUS permet d'assurer l'interface entre les modules spécifiques programmés et le code de calcul par éléments finis SYSTUS. Les modules élaborés pour les traitements des non-linéarités matérielle et géométrique, ainsi que pour l'analyse de la stabilité sont annexés à ce mémoire (Annexe 1).

Il faut souligner d'une part, que le logiciel développé permet d'étudier les structures classiques du Génie Civil, à savoir tout type d'assemblage entre éléments de structure élancés. Les liaisons entre ces éléments peuvent être de toute nature (nœuds rigides, articulés ou liaisons intermédiaires) et les simulations peuvent être menées pour tous les types de liaisons externes. Le couplage avec SYSTUS permet donc de bénéficier des larges fonctionnalités d'un code de calcul par éléments finis et de s'intéresser à une structure réelle quel que soit son degré d'hyperstaticité. D'autre part, les modules développés permettent de simuler le comportement des structures en béton armé et élargissent ainsi les applications du code SYSTUS. Des exemples correspondant à des structures en béton armé usuelles sont présentés dans le chapitre suivant. Pour ces structures, le logiciel permet de déterminer les déformations réelles engendrées par le comportement non linéaire unilatéral du béton. De plus, les risques de ruine prédits peuvent être de deux natures : par épuisement des matériaux constitutifs ou par divergence d'équilibre.

Le logiciel développé peut être aisément adapté afin de prendre en compte d'autres types de lois de comportement pour les matériaux constitutifs, béton ou acier. Les modifications nécessaires porteraient sur la matrice tangente introduite dans le schéma itératif de Newton-Raphson.

## 3.3 Validations du logiciel développé

Nous allons dans ce paragraphe présenter les différents tests menés pour justifier de la validité de la modélisation retenue et de la programmation effectuée. Ces tests concernent d'une part des poutres élastiques linéaires homogènes, et d'autre part, des poteaux en béton armé. La première série de tests permet de comparer les résultats des simulations à des solutions analytiques. La seconde permet une confrontation à des abaques et à des résultats expérimentaux [Has99]. Enfin différentes analyses de sensibilité vis-à-vis de certains paramètres confortent ces validations.

### 3.3.1 Poutres élastiques linéaires homogènes

L'étude de la charge d'instabilité pour des structures homogènes constituées de matériaux à comportement élastique linéaire constitue une première étape incontournable de validation de l'outil numérique proposé. Nous avons donc vérifié que les simulations du flambement de poteaux homogènes à comportement élastique linéaire isotrope donnent comme charge d'instabilité les forces critiques d'Euler [FRE 94]. Comme introduit au paragraphe 2.2.6 du chapitre 2, ces charges critiques d'Euler sont obtenues en résolvant l'équation différentielle de la flèche  $v(x)$  :

$$EIv''(x) = -Fv_0(x) - Fv(x) \quad (3.26)$$

où  $F$  représente l'effort de compression appliqué à la poutre et  $v_0(x)$  le défaut géométrique initial de la structure.

La résolution de cette équation est explicite et conduit à une expression de la flèche en tout point de la poutre sous la forme :

$$v(x) = \frac{F.v_0(x)}{F_{cr} - F} \quad (3.27)$$

où  $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2}$  est la charge critique d'Euler exprimée en fonction de la longueur de

flambement  $L_f$ . La valeur de cette dernière est fonction des conditions aux limites en déplacements imposées à la poutre. Pour les conditions de liaisons usuellement rencontrées, les expressions de la longueur de flambement  $L_f$  en fonction de la longueur  $L$  de la poutre sont rappelées sur les figures 3.7 à 3.9. ci-après.

$$l_f = 2l$$

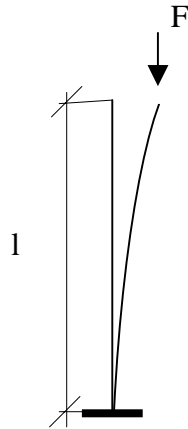


Figure 3. 7 - Poteau encastré-libre

$$l_f = l$$

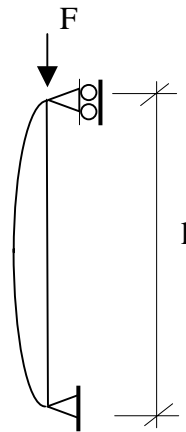


Figure 3. 8 - Poteau biarticulé

$$l_f = 0.7l$$

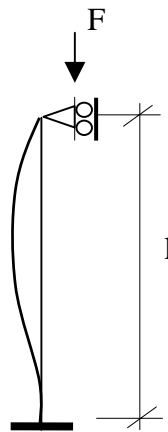


Figure 3. 9. - Poteau encastré-articulé

Pour ces trois cas, les simulations ont été effectuées à l'aide du logiciel développé sur un poteau de longueur  $l = 3,5$  m, de moment quadratique  $I = 21,5$  cm<sup>4</sup> et constitué d'un matériau de module d'Young  $E = 205000$ MPa. Les poutres ont été discrétisées à l'aide de 10 éléments finis et le calcul incrémental de la charge de ruine a été mené avec un pas de chargement de 0,5 kN. Le défaut géométrique initial a été introduit à travers une excentricité de l'effort de compression  $F$ .

Les résultats de ces simulations sont présentés dans le tableau 3.1. Les charges numériques ont toutes été obtenues par instabilité des structures et leurs valeurs  $P_{\text{num}}$  sont comparées aux intensités analytiques des charges critiques d'Euler  $F_{\text{cr}}$ .

Conditions d'appuis Charge critique (kN)	Encastrée-libre	Biarticulée	Encastrée
	Analytique $F_{\text{cr}}$	8.8	35.2
Numérique $P_{\text{num}}$	8.5	35	70

Tableau 3. 1 - Confrontation des résultats numériques aux résultats analytiques

Il ressort de ces premières comparaisons que le logiciel développé permet d'obtenir les charges d'instabilité, dans le cas de structures homogènes à comportement élastique linéaire, avec une très bonne précision, l'erreur n'excédant pas 3% .

### 3.3.2 Poutres en béton armé

Les validations dans le cas des structures non homogènes constituées de matériaux à comportement non linéaire sont effectuées pour des poteaux en béton armé sollicités par une force ponctuelle excentrée de  $e_0$ .

Les résultats numériques sont confrontés à des résultats issus des règlements de calcul du béton armé (BAEL, tables de Feassel) ainsi qu'à des résultats expérimentaux.

Ces différentes comparaisons sont effectuées en fonction de l'élanement géométrique  $\lambda$  du poteau, de la résistance à la compression  $f_c$  du béton qui le compose et de l'excentricité initiale  $e_0$  du chargement appliqué.



### 3.3.3 Confrontation avec les résultats des tables de Feassel

P.FEASSEL, A.MORISSET et B.FOURE [FAE 72] ont établi des abaques donnant les charges ultimes de flambement de poteaux en béton armé soumis à un effort normal excentré. Ces tables de calculs aux états limites ultimes ont été établies pour un comportement en compression du béton modélisé par la loi de Desayi-Krishnam [CAP75] :

$$\sigma_c = \frac{f_c}{\gamma_c} \left[ \frac{2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}}}{1 + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right)^2} \right] \quad (3.28)$$

dont l'allure est donnée sur la figure 3.10 :

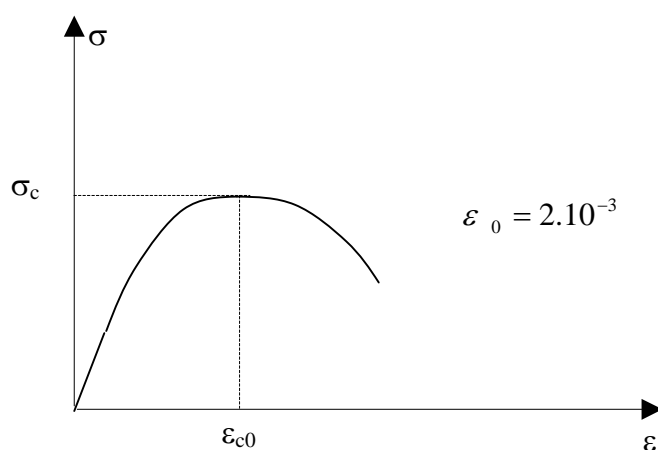


Figure 3. 10 - Loi de Desayi-Krishnam

Le contexte dans lequel ces tables ont été établies est rappelé dans l'Annexe 2.

La loi (3.28) est différente de celle (3.4) programmée dans le logiciel, mais les confrontations envisagées sont licites du fait que ces deux lois donnent le même module tangent à l'origine.

Les poteaux étudiés, de longueur  $L$ , présentent des sections rectangulaires de base  $b$  et hauteur  $h$ , armées de deux lits d'armatures  $A_1$  et  $A_2$  dont les positions sont définies par les distances  $d$  et  $d'$ . Ces poteaux sont soumis à un effort de compression  $F$  excentré de  $e_0$

par rapport à leur axe de symétrie. Leur plan de flambement est le plan  $CC'$  indiqué sur la figure 4.7. On notera enfin  $f_c$  la résistance à la compression du béton et  $f_e$  la limite d'élasticité des aciers.

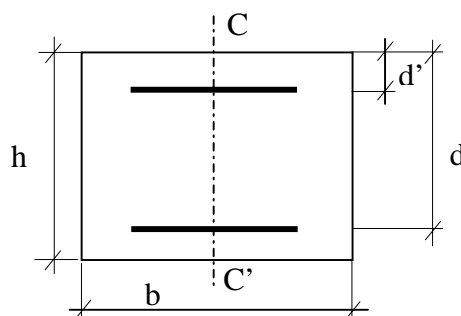


Figure 3. 11 - Notations pour la section béton armé

Deux poteaux de liaisons externes différentes ont été calculés à l'aide des tables de Feassel. L'un est biarticulé, l'autre est encasturé-libre, et leurs données géométriques et mécaniques sont regroupées dans le tableau suivant :

	Poteau biarticulé	Poteau encasturé-libre
$l$ (cm)	720	600
$e_0$ (cm)	4.8	3.6
$h$ (cm)	24	60
$b$ (cm)	40	100
$A=A'$ (cm <sup>2</sup> )	6.02	12.75
$d'$ (cm)	2.5	2.5
$f_c$ (Mpa)	33.5	30
$f_e$ (Mpa)	400	460

Tableau 3. 2 - Caractéristiques géométriques et mécaniques des poteaux

Le comportement de ces poteaux a parallèlement été simulé à l'aide du logiciel en utilisant une discrétisation en 10 éléments finis et un pas de chargement constant de  $\Delta P = 20 \text{ KN}$ . Les charges critiques obtenues numériquement par instabilité sont comparées aux valeurs calculées par les tables dans le tableau 3.3 :

Poteau	$\lambda$	$e_0$ [cm]	$f_c$ [MPa]	$F_{Feassel}$ [kN]	$P_{num}$ [kN]	Ecart [%]
Encastré-libre	20	3.6	30	633	620	2
Biarticulé	30	4.8	33.5	852	840	1,4

Tableau 3. 3 - Confrontation simulations numériques / résultats des tables

Le paramètre  $\lambda$  désigne ici l'élancement géométrique  $\lambda = \frac{l_f}{h}$  là encore, on observe une très bonne corrélation dans les prédictions des charges de ruine pour les poteaux testés.

### 3.3.4 Confrontation avec des résultats expérimentaux

Pour ces confrontations à des essais expérimentaux, nous avons retenu les résultats obtenus par Mehmel et al [MEH69]. Les essais ont été effectués sur des poteaux en béton armé biarticulés, soumis à deux charges axiales excentrées aux deux extrémités. Les excentricités initiales en tête et en pied de poteau sont identiques.

Les caractéristiques géométriques et mécaniques des poteaux retenus dans cette phase de test sont précisées dans le tableau ci-dessous :

n°de poteau	l [cm]	b [cm]	h [cm]	A = A' [cm <sup>2</sup> ]	d [cm]	d' [cm]	$f_e$ [Mpa]	$f_c$ [Mpa]	$e_0$ [cm]
1	340	25.3	20.2	3.11	17	3.2	480	32.7	9.6
2	450	25.2	20.3	3.12	17.1	3.12	480	41.5	9.7
3	340	25.2	15.1	2.38	12.5	2.6	510	41.9	7.6
4	450	25.3	15	2.38	12.5	2.5	510	41.3	2.45
5	450	25.3	14.8	2.36	12.3	2.5	510	42.3	7.3
6	340	25.3	15.8	6.37	12.8	3	418	41.4	2.6

Tableau 3. 4 - caractéristiques géométriques et mécaniques des poteaux testés

Pour des raisons de symétries, les simulations numériques du comportement de ces poteaux biarticulés sont effectuées sur des géométries équivalentes de poteaux encastrés-libres de longueur  $\frac{l}{2}$  de manière à conserver les longueurs de flambement  $l_f$ , figure 3.12.

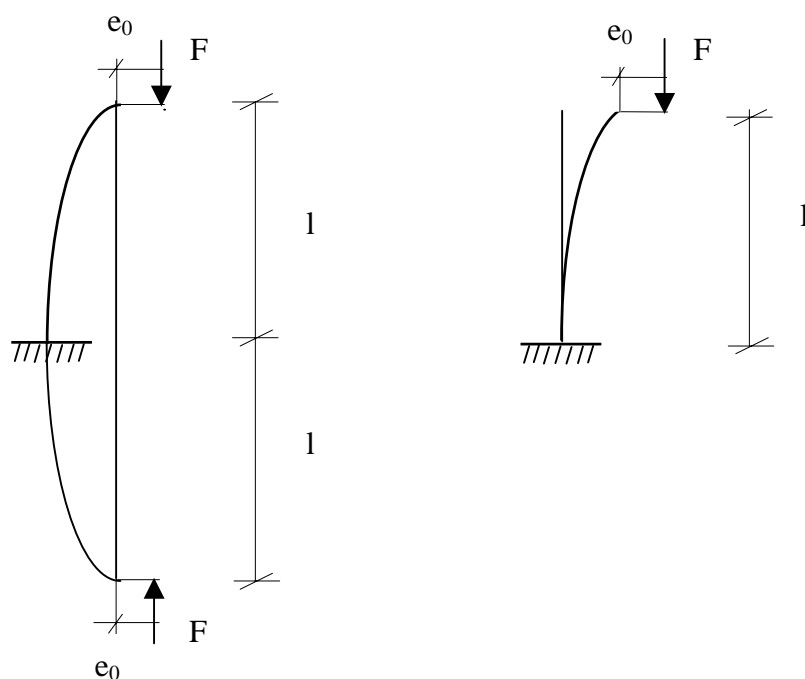


Figure 3. 12 - Illustration de la prise en compte des symétries

Les simulations numériques ont été effectuées en discrétisant ces structures en 10 éléments finis. Les valeurs des différents pas de chargement  $\Delta P$  retenus ainsi que les charges critiques calculées à l'aide du logiciel sont regroupées et comparées aux charges expérimentales dans le tableau ci-dessous :

poteau	$\Delta P$ [kN]	$P_{\text{num}}$ [kN]	$P_{\text{exp}}$ [kN]	Ecart [%]
1	10	320	326	1,8
2	5	260	264	1.5
3	5	180	180	0
4	10	370	375	1.3
5	5	135	138	2.1
6	20	740	750	1.3

Tableau 3. 5 - Confrontation simulations numériques / résultats expérimentaux

La confrontation des charges d'instabilité numériques aux charges de ruine expérimentales montre que le logiciel permet de prédire la charge de ruine  $P_{cr}$  de la structure avec une erreur relative n'excédant pas 2.1%.

### 3.3.5 Tests de sensibilité aux caractéristiques physiques des poutres

Une dernière phase de validation du logiciel développé a consisté en l'étude de la sensibilité des charges critiques obtenues numériquement par rapport à différents paramètres physiques et mécaniques de structures [HAS 99]. Les paramètres étudiés sont l'élanement géométrique, l'excentricité initiale de l'effort de compression, la résistance à la compression du béton ainsi que de la position des armatures. On retrouve dans la bibliographie, l'étude de l'influence de ces paramètres sur la charge critique de flambement des poteaux en béton armé [FEA72].

La cohérence des résultats numériques obtenus lors de ces analyses de sensibilité et présentés ci-après, constitue une justification supplémentaire de l'efficacité de l'outil numérique développé.

Ces études paramétriques ont été effectuées sur un poteau en béton armé encasté-libre ayant les caractéristiques suivantes :

	Poteau encasté-libre
$l$ (cm)	225
$e_0$ (cm)	2
$h$ (cm)	15
$b$ (cm)	25.3
$A=A'$ (cm <sup>2</sup> )	2.36
$d'$ (cm)	2.5
$f_c$ (Mpa)	33.5
$f_e$ (Mpa)	400

Tableau 3. 6 - Caractéristiques géométriques et mécaniques du poteau

### a) Influence de l'élancement géométrique

Pour cette première étude, le seul paramètre variable est la hauteur  $h$  de la section, qui varie de 5 cm à 70 cm. Son influence est illustrée à travers l'introduction de variables adimensionnelles retenues par Feassel [FEA72] : la charge critique réduite  $\frac{P_{cr}}{bhf_c}$  et l'élancement géométrique réduit  $\frac{L_f}{h}$ , où  $L_f$  représente la longueur de flambement. La figure 3.13 montre l'influence de l'élancement géométrique réduit sur cette charge critique réduite. Il apparaît sur cette courbe trois zones caractéristiques. Dans la première zone, pour des faibles élancements, la charge critique varie peu. Ensuite, pour les élancements courants (15-45), la charge critique réduite est très influencée par les variations de l'élancement géométrique réduit. Une augmentation de 10% de l'élancement entraîne une chute du même ordre de l'intensité de la charge critique. Enfin, lorsque les élancements deviennent importants, l'intensité de la charge critique n'est plus guère influencée par les variations d'élancement et elle se stabilise à une faible valeur. Ceci correspond aux cas où les pièces deviennent tellement élancées que les phénomènes de flambement interviennent dès les faibles intensités de charges.

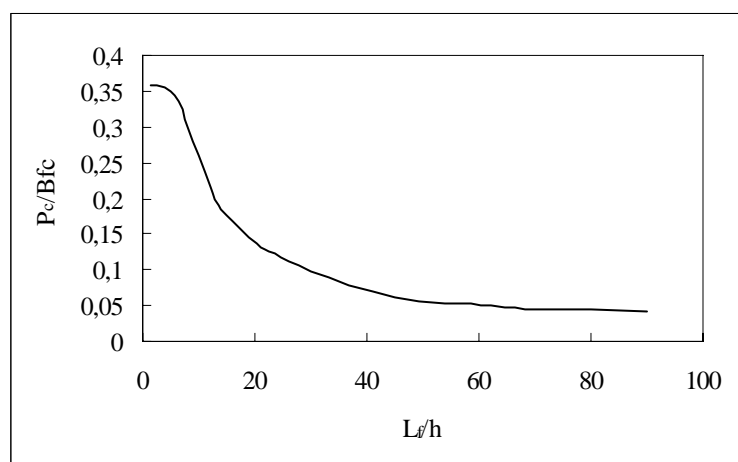


Figure 3. 13 - Influence de l'élancement géométrique

### b) Influence de l'excentricité

L'évolution de l'intensité de la charge critique en fonction de l'excentricité initiale  $e_0$  du chargement est représentée sur la figure 3.14 pour des valeurs de  $e_0$  variant de 1 cm à 18 cm. On observe sur cette figure une zone de forte sensibilité de la charge critique de flambement aux petites excentricités (inférieures à 5 cm). Une faible variation de l'excentricité  $e_0$  entraîne une forte chute de l'intensité de la charge conduisant à l'instabilité de la structure. Cette évolution illustre l'importance de ce paramètre de conception qui n'est pas toujours facilement contrôlable dans la réalisation des ouvrages. Ainsi, la crainte de sous-évaluer l'excentricité initiale dans les calculs de flambement est fondée. Au-delà de ces petites excentricités, la charge critique diminue lentement avec l'augmentation de l'excentricité et tend vers de faibles valeurs. Pour des chargements très excentrés, la ruine devient donc quasi-immédiate.

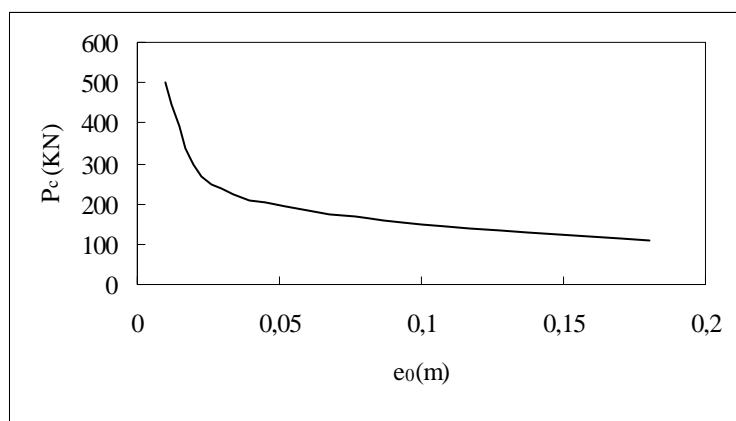


Figure 3. 14 - Influence de l'excentricité

### c) Influence de la résistance à la compression du béton

La figure 3.15 donne l'évolution de la charge critique de flambement en fonction de la résistance à la compression du béton qui varie, dans cette troisième étude de sensibilité, de 5 MPa à 50 MPa pour un élancement de 30.

La charge critique croît de façon quasi-linéaire avec l'augmentation de la résistance à la compression du béton. On retrouve, comme attendu pour des élancements faibles, le fait que plus le matériau constitutif est résistant, plus les phénomènes d'instabilité se produisent tardivement.

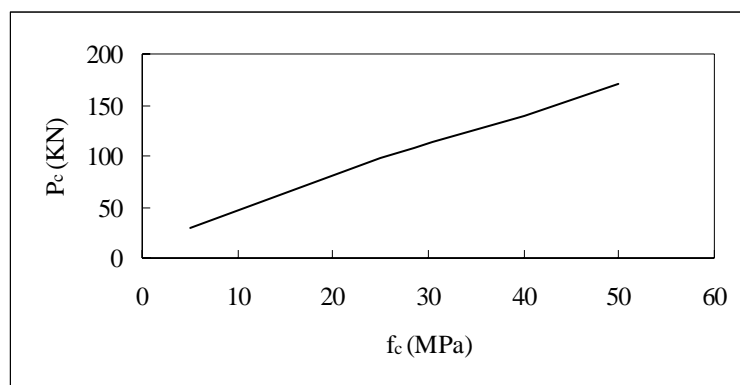


Figure 3. 15 - Influence de la résistance à la compression du béton

#### d) Influence de la position des aciers

La sensibilité de l'intensité de la charge critique à la position des lits d'acier a été étudiée en modifiant la position d'un seul des deux lits d'acier et en gardant un élancement de 30. Les deux valeurs correspondantes d'enrobage sont :  $d' = 3.5$  cm et  $d' = 4.5$  cm. Les charges critiques de flambement obtenues numériquement sont respectivement  $P_{cr} = 170$  kN et  $P_{cr} = 140$  kN. Une erreur de 1 cm sur la position des armatures entraînerait donc une variation de plus de 17% sur l'intensité des charges de ruine. Il convient donc d'être précis dans la prise en compte des enrobages dans les études de dimensionnement.

#### e) Bilan

L'ensemble des validations effectuées montre que ce logiciel permet de prédire avec exactitude la charge d'instabilité des structures étudiées, que celle-ci intervienne par flambement ou par épuisement des matériaux. D'autre part, les analyses de sensibilité effectuées, de par leurs corrélations avec des tendances publiées [FEA76], conforte la validité de l'outil numérique développé. En effet, les influences observées avec le logiciel proposé ici correspondent bien aux sensibilités de la charge critique vis-à-vis de l'élancement, de l'excentricité et de la résistance à la compression du béton mises en évidence par P. Faessel, A. Morisset et B. Fouré, et reproduites sur les figures fig 3.16, 3.17 et 3.18. Bien qu'obtenues pour d'autres poteaux de caractéristiques différentes, ces courbes présentent des tendances analogues à celles observées sur les figures 3.13, 3.14 et 3.15.



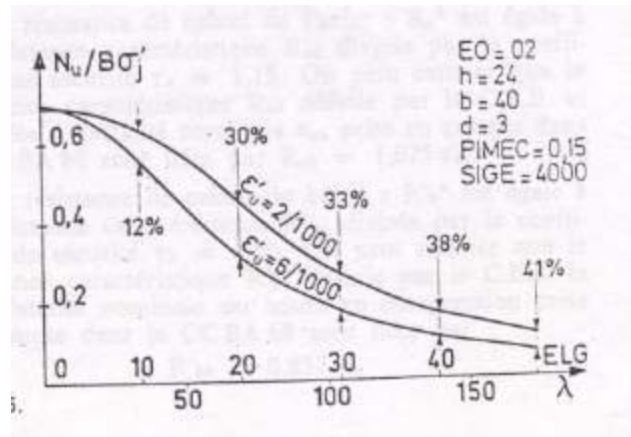


Figure 3. 16 - Sensibilité à l'élanement [FEA72]

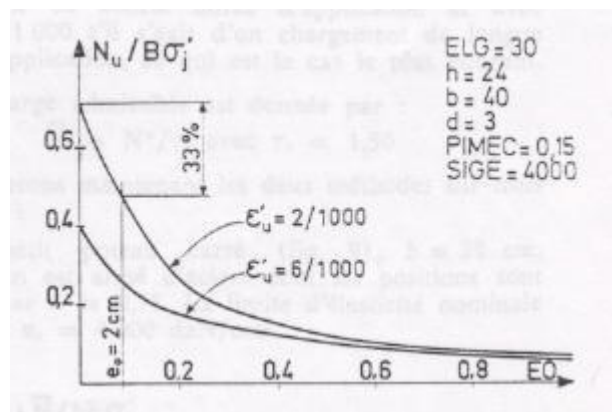


Figure 3. 17 - Sensibilité à l'excentricité [FEA72]

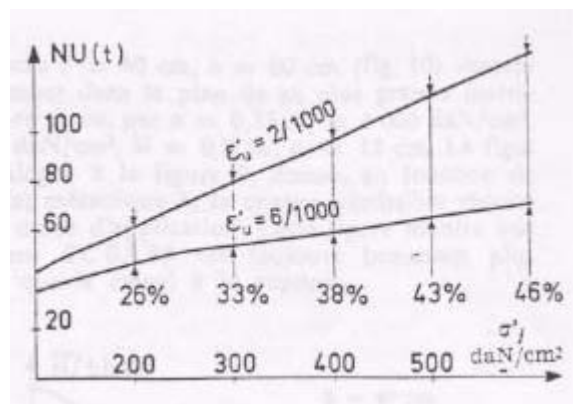


Figure 3. 18 - Sensibilité à la résistance du béton [FEA72]

### 3.4 Conclusion

L'implémentation de la méthode de calcul de flambement des structures en béton armé est faite en langage SIL. C'est un langage de programmation propre au code de calcul par élément finis SYSTUS. La stratégie numérique adoptée est pilotée par les fonctions d'accès aux structures du code et intégrée au langage de programmation.

L'ensemble des procédures spécifiques au traitement des deux types de non-linéarité et du caractère unilatéral du comportement du béton ont été implémentées, à savoir :

- le calcul itératif des déplacements réels des poutres en béton armé,
- l'actualisation des caractéristiques géométriques et mécaniques des sections droites,
- les procédures de remaillages pour les configurations intermédiaires et le traitement itératif de la stabilité.

La fiabilité de l'outil ainsi élaboré est justifiée par différentes phases de validation ainsi que des confrontations à des méthodes explicites et expérimentales. La prédiction numérique des charges de ruine présente, dans la majorité des cas, un pourcentage d'erreur relativement faible. De plus, l'analyse de l'influence de paramètres géométriques et mécaniques sur la charge de ruine conforte les validations effectuées.

Implémentée puis validée, la méthode de calcul est ensuite appliquée à des structures en béton armé usuelles de type poteau, portique et cadre dans le chapitre 4.

---

<b>Application à l'analyse de la stabilité de structures usuelles en béton armé</b>	<b>83</b>
<b>4.1 Introduction</b>	<b>83</b>
<b>4.2 Stabilité de poteau</b>	<b>84</b>
4.2.1 Caractéristiques du poteau	85
4.2.2 Simulations numériques et confrontations	86
4.2.4 Sensibilité aux paramètres de simulation numérique	90
a) Influence des pas de chargement	90
b) Influence du maillage	93
c) Influence de la prise en compte de la non-linéarité matérielle	94
<b>4.3 Stabilité de portique</b>	<b>96</b>
4.3.1 Caractéristiques du portique	98
4.3.2 Simulations numériques et confrontations	101
4.3.3 Validation du processus de remaillage	107
<b>4.4 Stabilité de cadre</b>	<b>109</b>
4.4.1 Caractéristiques du cadre	110
4.4.2 Simulations numériques et confrontations	112
<b>4.5 Conclusion</b>	<b>114</b>

## Application à l'analyse de la stabilité de structures usuelles en béton armé

### 4.1 Introduction

Le logiciel que nous avons présenté et validé au chapitre 3 est ici utilisé pour l'étude de la stabilité de différentes structures en béton armé usuelles dans les constructions Génie Civil [PRA97]. Nous avons choisi des exemples d'application qui ont fait l'objet d'études expérimentales ainsi que de simulations numériques effectuées avec d'autres codes de calcul.

Il existe dans la littérature un certain nombre d'essais expérimentaux qui portent sur différents types de structures élancées en béton armé telles que des poutres continues, des portiques ou des cadres [ROW71]. L'analyse bibliographique de A. Grelet [GRE76] présente une synthèse complète des différents types d'essais réalisés. Des extraits en fonction des types de structures retenues seront présentés dans le corps du chapitre.

Une étude bibliographique des modèles proposés pour l'étude de la stabilité des structures élancées fait apparaître un premier groupe de travaux sur les structures métalliques. Un historique intéressant est présenté par R. Bjorhovde [BJO85] qui expose la résistance et le comportement au flambement des poutres métalliques, en se livrant à des comparaisons entre la théorie d'Euler et les critères d'analyse utilisés en Amérique du nord. Des simulations numériques par éléments finis ont été développées par V. De Ville De Goyet [DEV89] pour l'analyse statique non-linéaire de la stabilité d'assemblages tridimensionnels de poutres métalliques. Dans ce type d'applications, on peut également citer les travaux de L. De Marneffe et A. Herman. [DEM92] sur l'analyse, par une méthode énergétique, de la stabilité d'un tétrapode de base d'un pylône pour ligne à haute tension.

Un second groupe de publications concernent les structures élancées en béton armé. Parmi elles, nous nous intéresserons plus spécifiquement aux références traitant des modélisations numériques par éléments finis prenant en compte les deux non-linéarités géométrique et matérielle. A Grelat [GRE78] a été parmi les premiers à prendre en compte dans la simulation ces deux types de non-linéarité. Le comportement du béton comprimé a été modélisé par la loi de Sargin, et celui des zones tendues a été simulé à l'aide d'une forme originale de loi de comportement où le béton est représenté par un diagramme de contrainte fictif triangulaire à partir de la fibre neutre. Ces travaux ont été complétés par O. Naït-Rabah [NAIT90] qui a étendu les simulations numériques aux structures tridimensionnelles. Afin d'améliorer les simulations des grands déplacements et des grandes rotations dans le programme PCP - SETRA développé par les auteurs précédents, F. Robert a proposé d'y introduire une description corotationnelle du mouvement pour le traitement de la non-linéarité géométrique [ROB 99]. D'autres auteurs ont complété des codes existants en développant des éléments finis spécifiques comme par exemple, B. Espion qui a proposé un élément fini plan de poutre à 9 degré de liberté [ESP86] ou S. Ghavamian [GHA98] qui a introduit une formulation en grands déplacements dans le code EFICOS d'analyse non-linéaire, statique ou dynamique, de structures en béton armé [Maz98]. Dicté également par des applications sismiques, F.J. Ulm [ULM94] a proposé d'enrichir la loi de comportement en introduisant un modèle d'endommagement dans les calculs de stabilité des structures en béton armé. La non-linéarité géométrique est alors traitée à l'aide d'une description corotationnelle du mouvement.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de simuler la stabilité de poteaux, portiques et cadres en béton armé. Pour chacun de ces types de structures, nous confronterons les résultats des simulations effectuées avec le code développé dans ce travail et couplé à SYSTUS, aux résultats expérimentaux publiés ainsi qu'à des résultats de simulations numériques effectuées par les auteurs cités précédemment.

## 4.2 Stabilité de poteau

Différentes études expérimentales ont été conduites sur des éléments de structure en béton armé. J.G. Mac Grégor et S.L. Barter ont testés des poteaux, de ferrailages identiques, encastrés dans des demi-poutres [MAC65]. En fonction de l'excentricité de la charge appliquée, les auteurs ont observé que certains poteaux périssaient par instabilité et d'autres par rupture d'une section d'extrémité.

Le flambement du poteau que nous allons étudier ici est tiré d'une série importante d'expériences mises en œuvre par B. Fouré [FOU78]. Il a réalisé cinq séries d'essais au Centre d'Etude des Structures de Saint-Rémy-lès-Chevreuses en 1974 et 1975. Ces résultats expérimentaux ont par ailleurs fait l'objet de confrontations avec des études numériques par F.J. ULM [ULM94] et F. ROBERT [ROB99]. Les poteaux testés expérimentalement sont de sections rectangulaires constantes et ont les mêmes armatures. Chaque série comprend d'une part, un ou deux poteaux élancés soumis à un essai de courte durée sur une presse hydraulique, et d'autre part, de trois à cinq poteaux de même élancement testés en longue durée sur un dispositif spécial. Les excentremets des articulations aux extrémités des poteaux ne sont pas forcément identiques. Le poteau que nous avons retenu ici, le poteau référencé II-1, est soumis à un chargement de courte durée (20 minutes environ), de sorte que les effets comportementaux à long terme n'interviennent pas.

#### 4.2.1 Caractéristiques du poteau

Le poteau expérimental mesure 4,5 m et possède une section rectangulaire. Les dimensions de cette section rectangulaire sont de 20 cm pour la base et 15 cm pour la hauteur. Elle est armée de quatre armatures en acier de 112 mm de diamètre, positionnées comme indiqué sur la figure 4.1. Le poteau est biarticulé à ses deux extrémités et est sollicité par une force axiale excentrée de 1,5 cm.

Les données, au pic de compression, pour le comportement du béton sont, pour la déformation :

$$\varepsilon_{b0}=0,0023$$

et pour la résistance à 28 jours :

$$f_{cj}=39,0\text{MPa}$$

Le comportement de l'acier est caractérisé par un module de Young de 200 GPa et une limite élastique de 474 MPa.

La ruine observée expérimentalement intervient par instabilité pour une charge critique estimée à 453 kN.

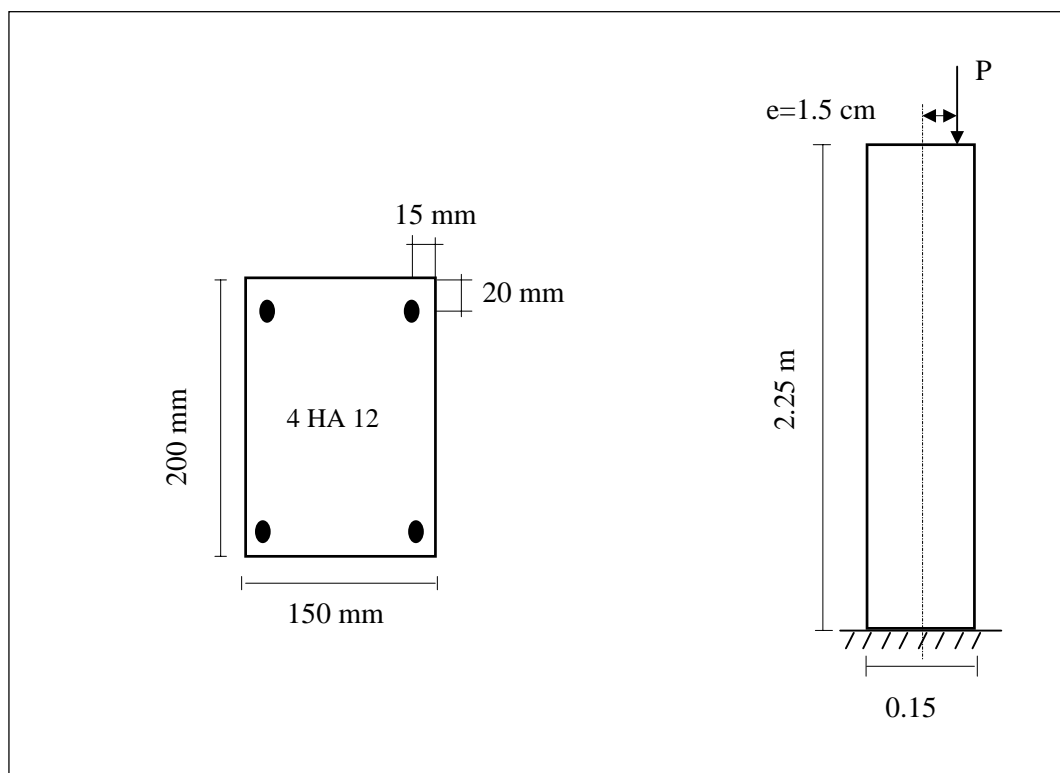


Figure 4.1 - Poteau de Fouré : géométrie et chargement

#### 4.2.2 Simulations numériques et confrontations

Les lois de comportements utilisées pour les simulations sont, comme nous l'avons indiqué au chapitre 2, la loi parabole rectangle pour le béton et une loi élastoplastique parfaite pour les aciers.

Du fait des symétries du problème étudié, on se ramène à l'étude d'un demi poteau, encastré à sa base et chargé, comme indiqué précédemment, par une force ponctuelle excentrée, figure 4.1. Cette structure est discrétisée en 10 éléments finis et la première simulation numérique est effectuée avec un chargement incrémental de pas constant ( $\Delta P = 50$  kN) jusqu'à la ruine de la structure.

Les configurations déformées du poteau à mi-charge puis à l'instabilité sont représentées sur la figure 4.2, le déplacement étant amplifié avec un facteur de 10.

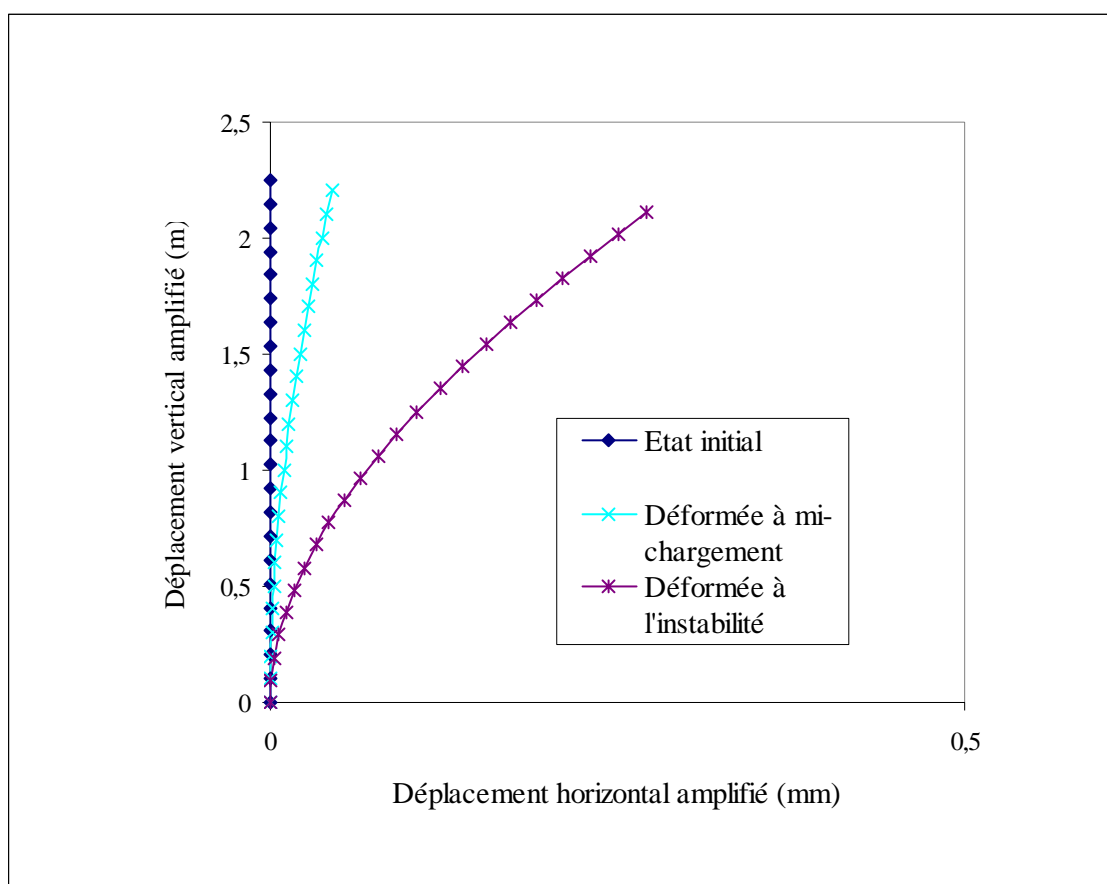


Figure 4. 2 - Déformées du poteau

On confronte sur la figure 4.3. l'évolution de la flèche en tête de poteau en fonction de la charge appliquée obtenue par simulation à celle observée expérimentalement.

On remarque que la simulation numérique permet de suivre fidèlement le comportement de la structure au cours de l'essai de flambement. La ruine obtenue numériquement est due à une divergence d'équilibre comme observée expérimentalement. Le tableau 4.1 résume les résultats obtenus pour la charge critique et la flèche ultime issues de notre modélisation ainsi que celles obtenues par l'expérience.



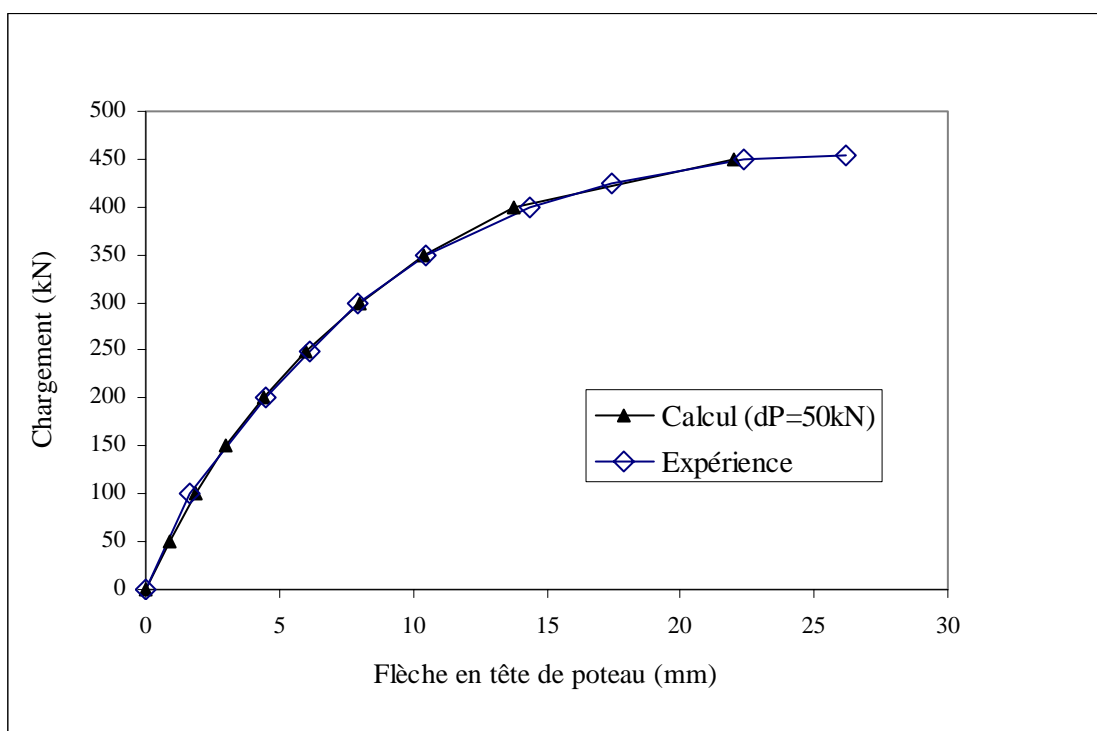


Figure 4. 3 - Simulation de l'expérience (incrémentes réguliers)

	Simulation	Expérience	Ecart (%)
Charge critique (kN)	450	453	0,6
Flèche critique (mm)	22	26,3	16

Tableau 4. 1 - Comparaisons résultats numériques/expérience

Nous rappelons que cette intensité calculée de 450 kN correspond au dernier incrément de charge pour lequel l'algorithme de stabilité des moments du second ordre converge. Il apparaît que la charge critique de ruine est approchée de manière plus précise que la flèche ultime.

Nous avons cherché à affiner ces résultats en procédant à des petits incréments de charge supplémentaires au delà de 450 kN. Ainsi, pour un  $\Delta P$  supplémentaire de 1kN par

exemple, le logiciel prédit une flèche ultime de 31 mm pour un chargement de 451 kN, charge de ruine correspondant à la dernière convergence de l'algorithme de stabilité. Ce  $\Delta P$  supplémentaire permet de réduire les deux erreurs relatives, mais la valeur de la flèche ultime est cette fois surestimée.

Cependant, la grandeur essentielle recherchée, à savoir la charge de ruine, n'est elle jamais dépassée, quels que soient les valeurs des  $\Delta P$  supplémentaires choisis. Ceci va donc dans le sens de la sécurité recherchée dans la prévision de la stabilité des structures Génie Civil.

Pour ce même poteau, la confrontation a également été menée par rapport aux travaux numériques de F. Robert [ROB99]. Dans ce but, la simulation a été une nouvelle fois effectuée avec des incréments de charge variables correspondant à ceux utilisés par l'auteur. Les trois courbes de réponse obtenues sont reportées sur la figure 4.4 :

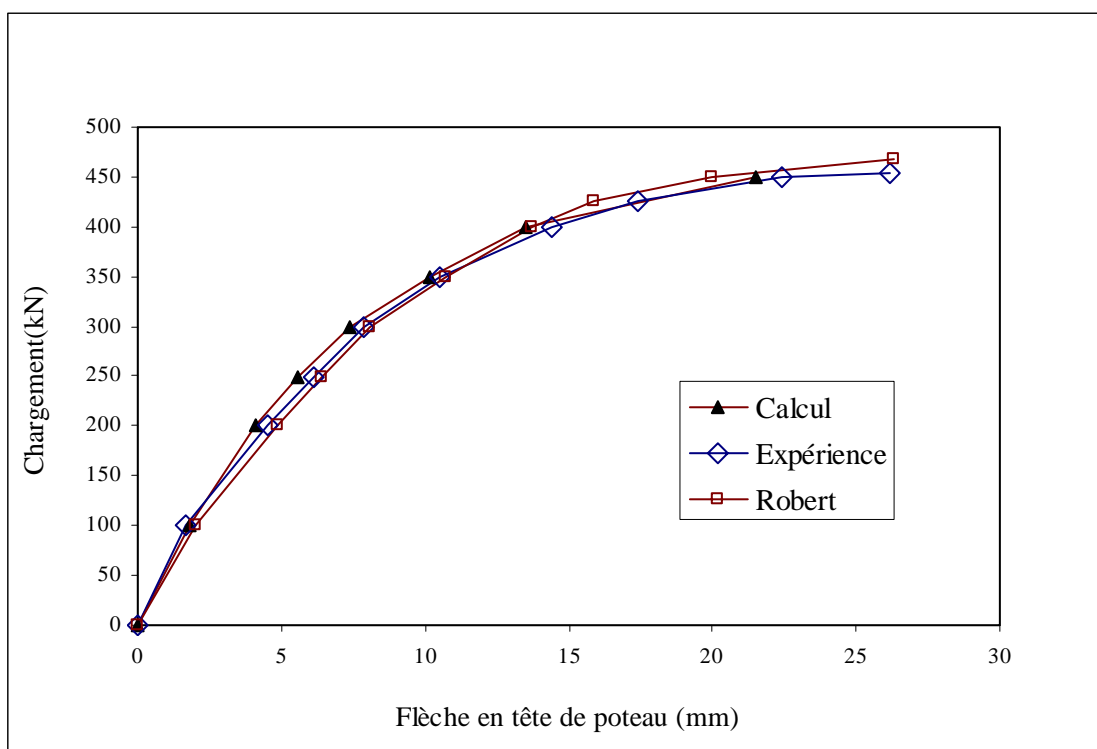


Figure 4. 4 - Confrontations numérique et expérimentale

Ces courbes montrent que les deux approches numériques sont d'une précision globalement équivalente. Cette constatation apporte une validation supplémentaire de l'approche proposée et du logiciel développé, et complète ainsi celles effectuées au chapitre 3. Notre approche semble mieux suivre la réponse expérimentale pour les taux

de charges élevés, mais s'écarte de la courbe expérimentale pour les chargements plus faibles, entre 200 kN et 350 kN. Cette imprécision n'apparaissait pas sur la figure 4.3 précédente et peut donc être attribuée aux incréments de charge initiaux plus grossiers utilisés dans cette seconde simulation.

Par rapport à la simulation de F. Robert, notre approche sous-estime la flèche ultime, mais par contre, ne surestime pas la charge de ruine qui est la grandeur essentielle recherchée pour prédire la stabilité des structures.

#### 4.2.4 Sensibilité aux paramètres de simulation numérique

Afin de s'assurer de la stabilité numérique du code développé, nous allons étudier, dans ce paragraphe, l'influence des pas de charges, du raffinement des maillages et de la prise en compte de la non-linéarité matérielle sur la qualité des résultats obtenus précédemment.

##### a) Influence des pas de chargement

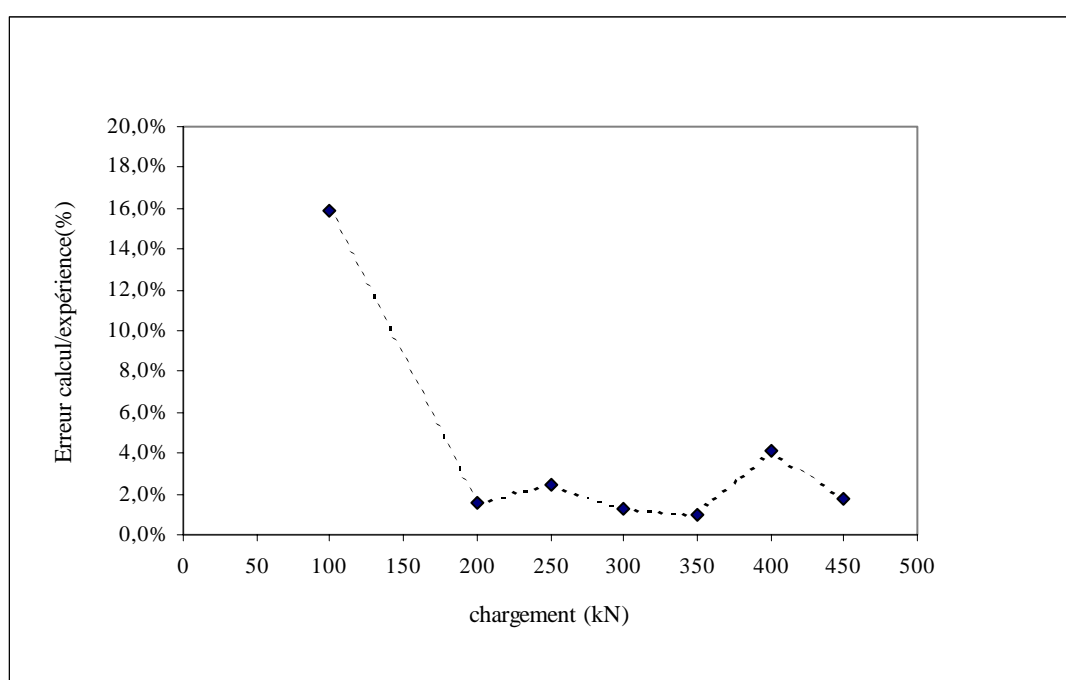


Figure 4. 5 - Estimation de l'erreur sur les déplacements pour un pas de chargement constant  $\Delta P = 50$  kN.

Pour observer l'influence de la valeur du pas de chargement, nous avons cherché à effectuer un calcul d'erreur relative entre les déplacements évalués numériquement et ceux mesurés expérimentalement. Pour un pas de charge constant de 50 kN correspondant à la courbe de réponse (figure 4.3), l'erreur par rapport aux points expérimentaux est tracée sur la figure 4.5.

L'erreur maximale, de plus de 15%, apparaît pour une charge appliquée de 100 kN. A ce niveau, la simulation a conduit à une section plus endommagée que dans l'expérience comme le montre la flèche numérique surestimée sur la figure 4.3. En dehors de ce premier point, la simulation permet de reproduire le comportement observé expérimentalement avec moins de 5% d'erreur.

En vue de corriger cette erreur, nous avons effectué différentes simulations complémentaires avec des pas de charge raffinés. La figure 4.6 présente ainsi les confrontations à la réponse expérimentale pour différentes simulations effectuées avec un pas de charges réguliers de 50 kN, 25 kN et 12,5 kN.

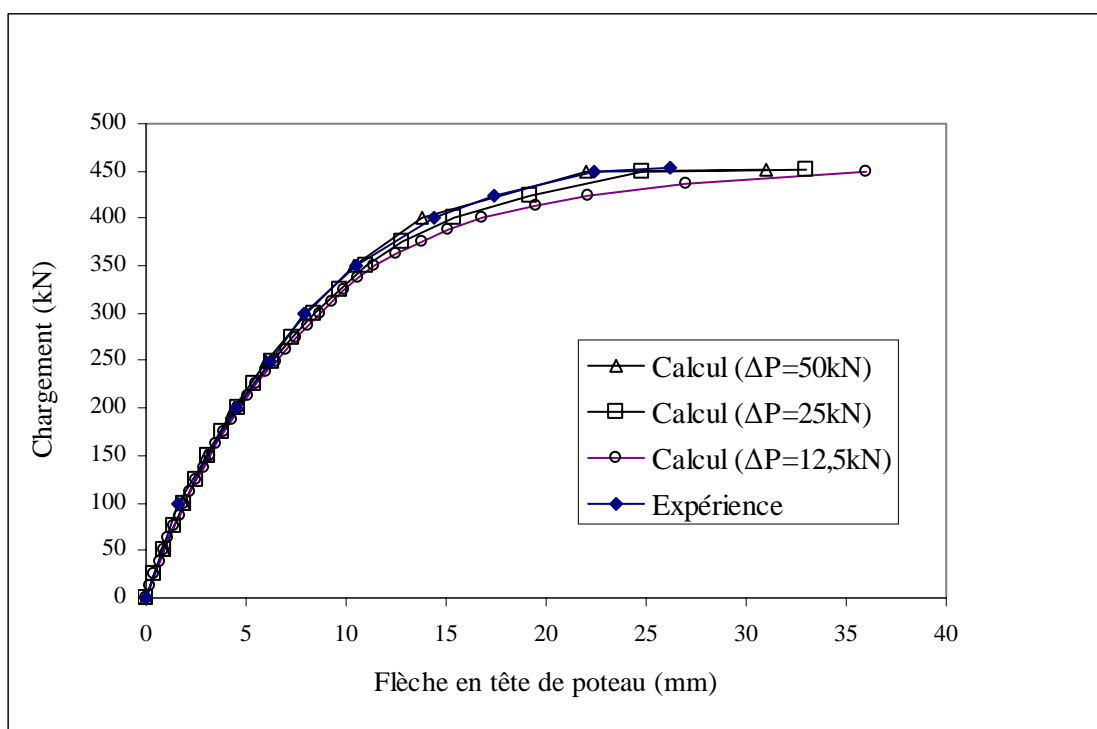


Figure 4. 6 - Influence des pas de chargement réguliers

Nous remarquons que la simulation s'écarte d'autant plus de la réponse expérimentale que l'incrément de charge est petit. Ce phénomène numérique peut être imputé à une dégradation numérique trop précoce des sections droites en béton armé induisant des flèches supérieures à celles mesurées expérimentalement. En effet, les parties de béton tendues ont été négligées dans les simulations comme cela se fait usuellement dans les règlements. Cette hypothèse paraît ici préjudiciable pour les faibles taux de chargement pour lesquels les structures sont loin de leurs états limites.

A partir de ces constatations, une dernière simulation à incréments de charge variables a été menée. Le premier pas de chargement a été choisi plus grand que les suivants et un raffinement a été effectué au voisinage de la charge de ruine. Les valeurs des incréments de charges retenues sont les suivantes : 100 kN, 150 kN, 200 kN, 250 kN, 300 kN, 350 kN, 400 kN, 425 kN et 450 kN. La courbe de réponse correspondante est présentée sur la figure 4.7.

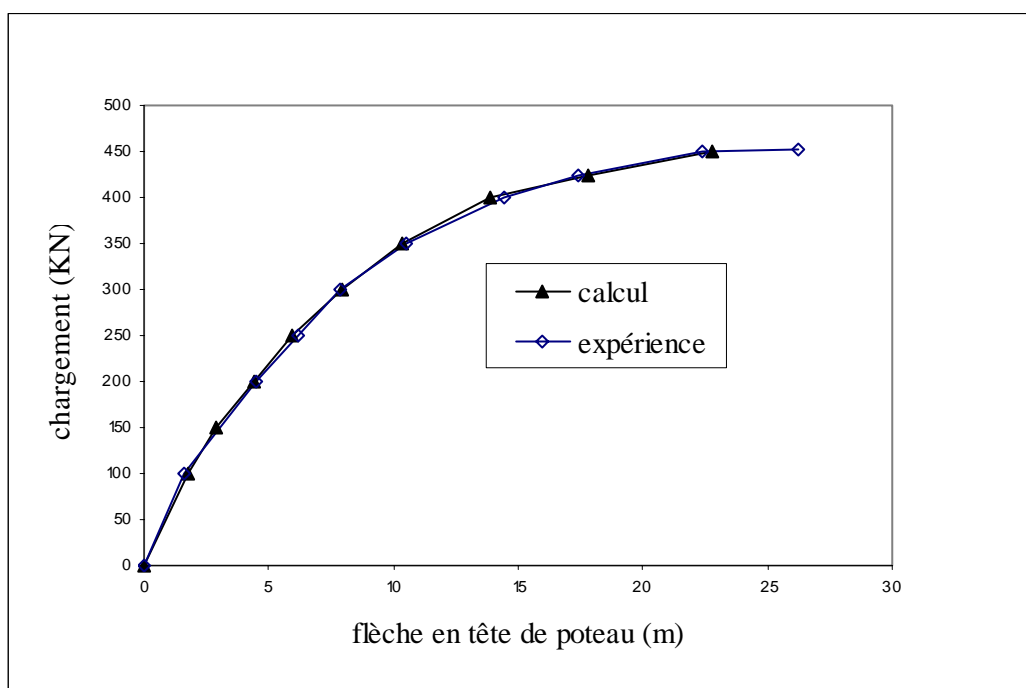


Figure 4. 7 - Simulation de l'expérience (incrément variables)

Un calcul d'erreur entre ces deux courbes est présenté sur la figure 4.8 qui montre une amélioration de l'erreur maximale qui diminue de plus de 15% à moins de 10% lorsque l'on fait le choix d'un premier pas de chargement plus grand.

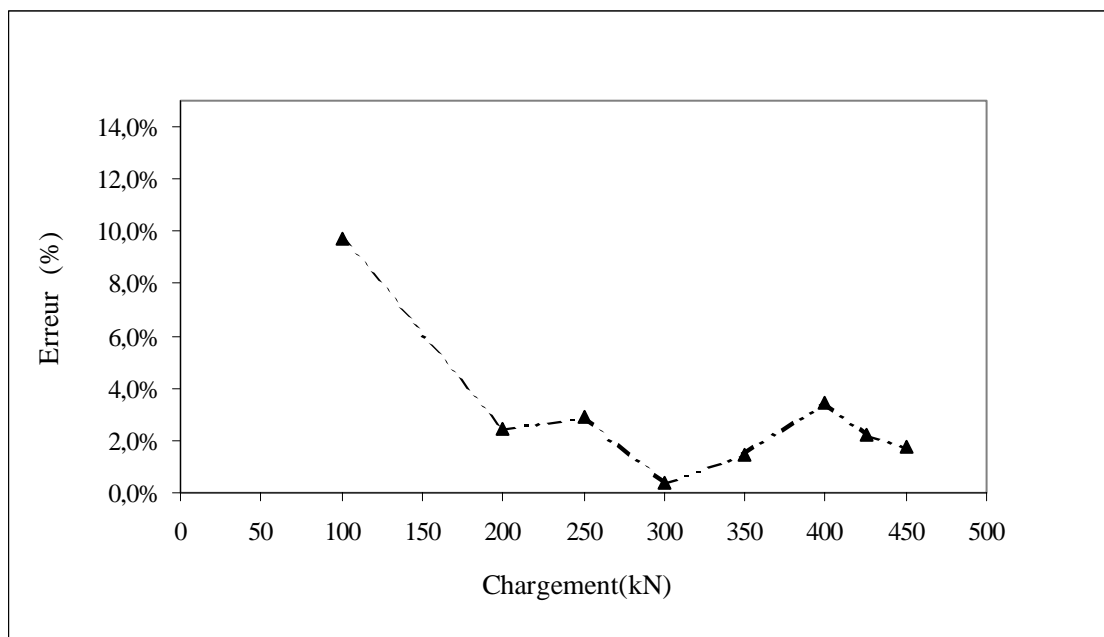


Figure 4. 8 - Estimation de l'erreur sur les déplacements pour un pas de chargement variable

### b) Influence du maillage

L'influence du maillage est étudiée dans le cas le plus précis déterminé précédemment, c'est-à-dire dans le cas du pas de chargement progressif adopté à la figure 4.7. Trois raffinements de maillage sont testés, comportant respectivement 10, 16 et 22 éléments finis. La figure 4.9 présente les trois courbes d'erreur relative correspondantes, calculées entre les flèches numériques et expérimentales. Nous constatons que, comme attendu, la précision des simulations s'améliore avec le raffinement des maillages et que la précision optimale est atteinte, pour ce poteau, dès 16 mailles.

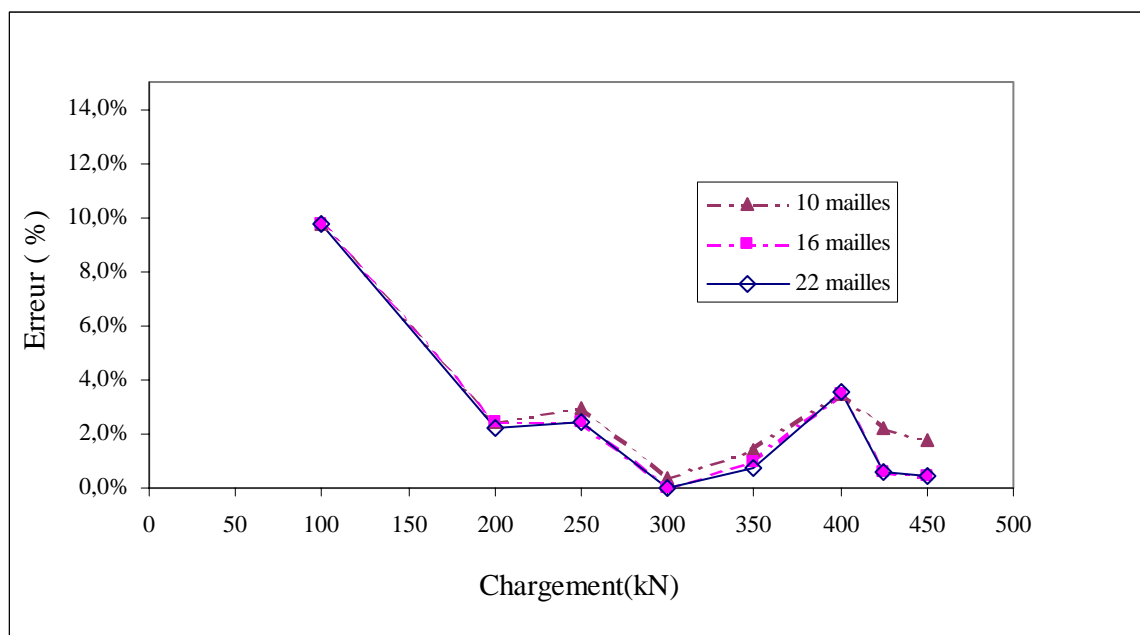


Figure 4. 9 - Estimation de l'erreur sur les déplacements pour trois raffinements de maillage

### c) Influence de la prise en compte de la non-linéarité matérielle

Afin de justifier la nécessité de prendre en compte le comportement non-linéaire des matériaux dans la prévision des charges de ruine, nous avons comparé la réponse du poteau étudié précédemment à celle d'un poteau supplémentaire de comportement homogène équivalent. Ce comportement est de surcroît supposé élastique linéaire de caractéristiques équivalentes :

$$E_{\text{éq}} = 3,65.10^4 \text{ MPa}$$

$$I_{\text{éq}} = 5,98.10^{-5} \text{ m}^4 .$$

Ces données correspondent à la section droite initiale du poteau de Fouré présentée à la figure 4.1

Les deux courbes de réponse charge-déplacement obtenues sont présentées sur la figure 4.10, l'une simulant un comportement élastique linéaire équivalent pour le béton armé et l'autre le comportement élastique non-linéaire de la loi parabole-rectangle.

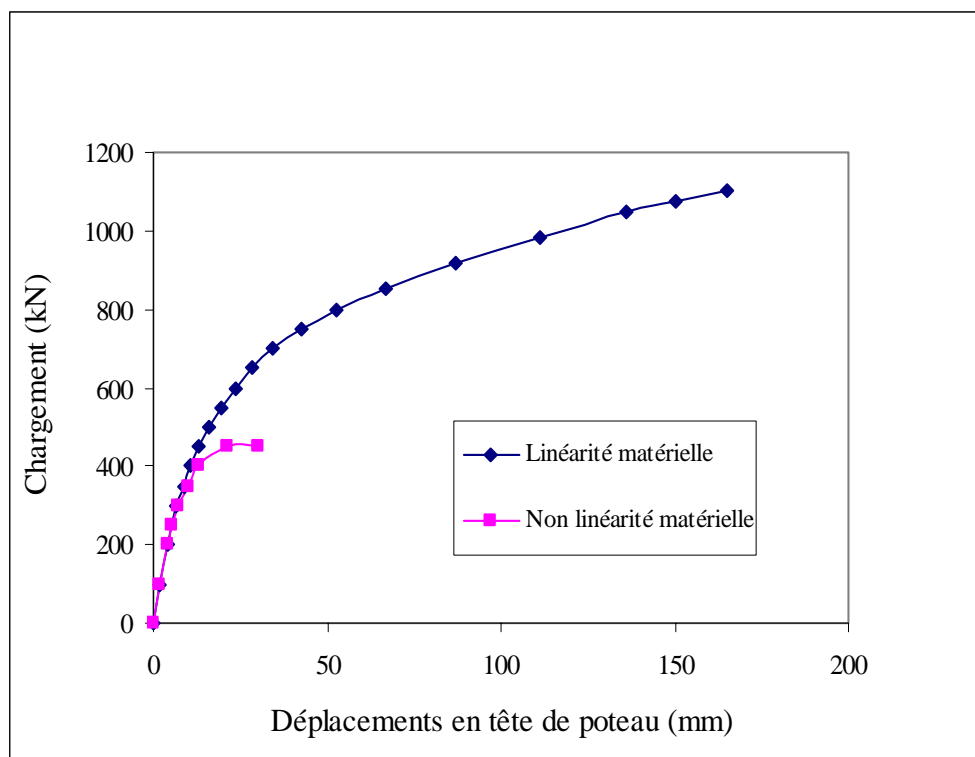


Figure 4. 10 - Influence de la non-linéarité matérielle

La figure 4.10 montre que les deux réponses apparaissent initialement semblables. Cependant le comportement linéaire conduit à une charge de ruine plus de deux fois supérieure à la charge de flambement réellement observée. La valeur élevée de cette charge, de 1100 kN, correspond néanmoins à la valeur prédite par la théorie d'Euler de 1060 kN.

La prise en compte de la non-linéarité matérielle du béton en plus de la non-linéarité géométrique s'avère donc indispensable pour des études fiables et réalistes de la stabilité des structures Génie Civil en béton armé.

Par ailleurs, en vue de compléter les analyses de sensibilité aux pas de chargement présentées précédemment, des calculs complémentaires ont été menés sur ce poteau additionnel de comportement équivalent élastique linéaire. La figure 4.11 montre ainsi que le pas de chargement n'est, cette fois-ci, très peu influent sur les réponses obtenues.



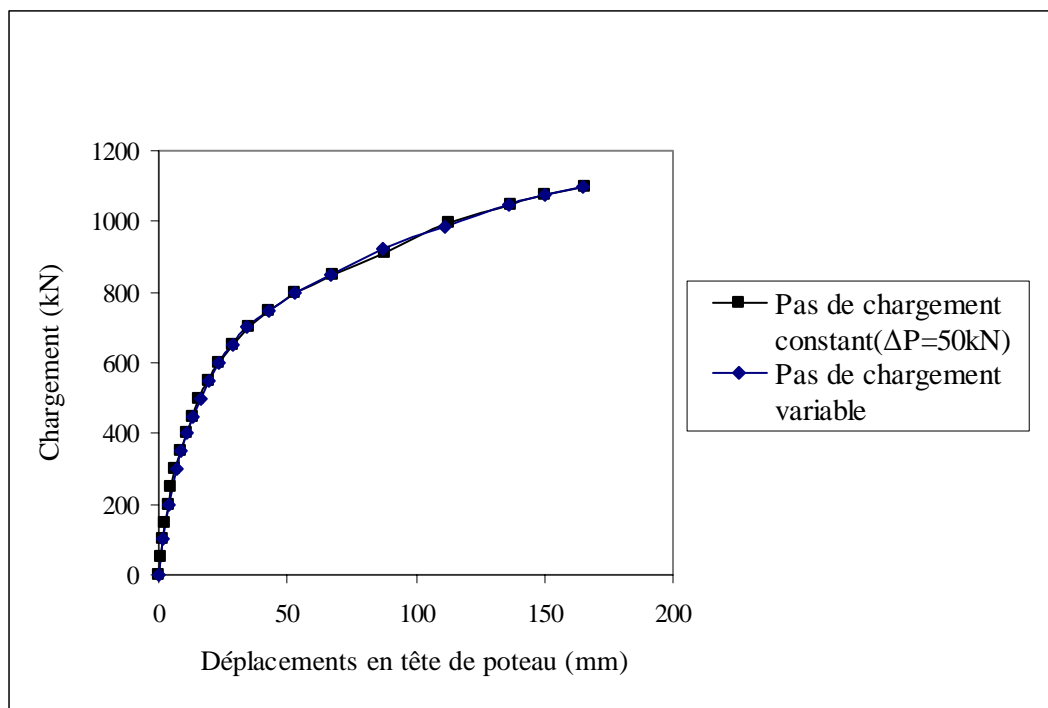


Figure 4. 11 - Influence du pas de chargement sur la non-linéarité géométrique.

Il apparaît donc que les variations des pas de chargement n'influencent que sur la simulation numérique du comportement non-linéaire des matériaux. Cette constatation corréle les observations de dégradation prématurée des sections droites mentionnées au début de ce paragraphe.

### 4.3 Stabilité de portique

De nombreux portiques de spécificités différentes ont fait l'objet d'études de stabilité expérimentales recensées dans la littérature.

Citons, par exemple, les travaux de J ou G.B. Read concernant neuf portiques simples faisant partie d'un ouvrage réel situé à Newman Spinney [REA65]. Ces portiques sont de sections variables, sollicités par des charges ponctuelles verticales ou horizontales et

sont, soit encastrés, soit articulés en pied de poteaux, Figure 4.12. Le paramètre variable au cours de l'étude expérimentale est la résistance du béton.

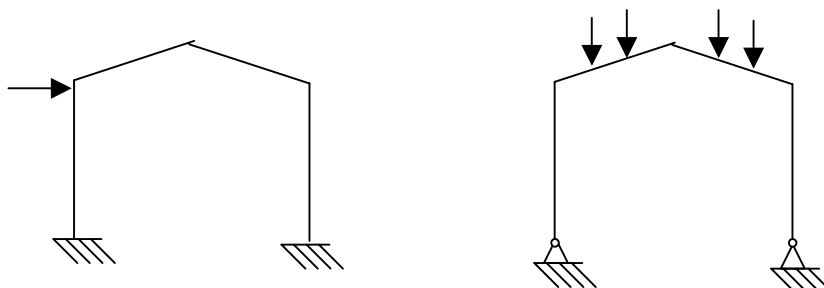


Figure 4. 12 - Portiques de G.B. Read

F. Beaufait et R.R. Williams ont, pour leur part, étudié l'influence de charges cycliques horizontales sur un ensemble de sept portiques simples biarticulés [BEA68]. La résistance à la compression du béton et le ferrailage des angles du portique constituaient les paramètres de leurs études expérimentales.

Des structures de grandeur réelle, assemblées à partir d'éléments préfabriqués, ont été testées par H.W. Conner, P.H. Kaar, et W.G. Corley [CON70]. Trois portiques, partiellement encastrés en pied, présentant des armatures variables le long des poteaux et des poutres, sont soumis simultanément à une charge répartie verticale et une force ponctuelle horizontale, Figure 4.13. Pour chaque étude, la rupture est survenue par ruine épuisement du matériau.

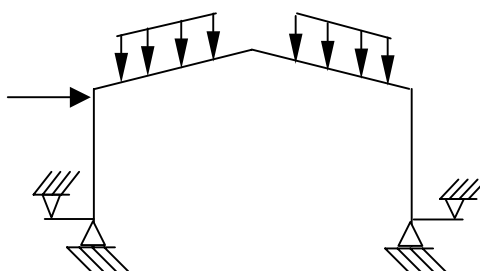


Figure 4. 13 - Portique de H.W. Conner, P.H. Kaar, et W.G. Corley

A.L. Lazaro a étudié deux portiques simples articulés, reproduction à l'échelle 1/15 des portiques de J.B. Read [REA65] ainsi qu'un portique d'un étage, constitué de deux travées, Figure 4.14, reproduisant à l'échelle 1/24<sup>e</sup> un cadre réel [LAZ71]. Les deux types de portique sont sollicités sous charge verticale et la ruine intervient par épuisement des matériaux.

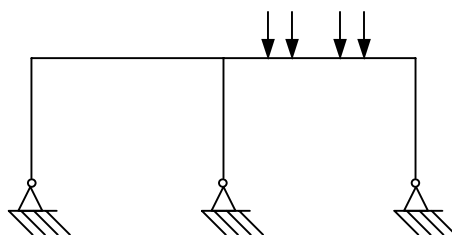


Figure 4. 14 - Portique de A.L. Lazaro

Une série de quinze autres portiques simples, articulés aux appuis, ont été testés par G.C. Ernst, G.D Smith, A.R Riveland et D.N Pierce [ERN73]. Ces essais se décomposent en deux séries :

- une série de six portiques, de même dimensions, de même ferrailage, constant le long de chaque barre, et sollicités sous charges verticales. Les paramètres variables sont la répartition et la qualité des aciers.
- la deuxième série de neuf portiques se distingue par des portées de poutres variables et des ferrillages d'angles différents.

Dans ce qui suit , nous retenons comme exemple de portique celui testé par W.B. Cranston [CRA65] qui a fait par ailleurs l'objet d'au moins quatre études numériques, par A. Grelat [GRE78], B. Espion [ESP86] et O. Naït-Rabah [NAI90] et F. Robert [ROB99]. Ce portique est extrait d'une série de huit portiques simples biarticulés. Ces portiques se distinguent entre eux par la répartition des armatures et le type de chargement.

### 4.3.1 Caractéristiques du portique

Les dimensions du portique choisi, référencé P7 par W.B. Cranston, sont reportées sur la figure 4.15.

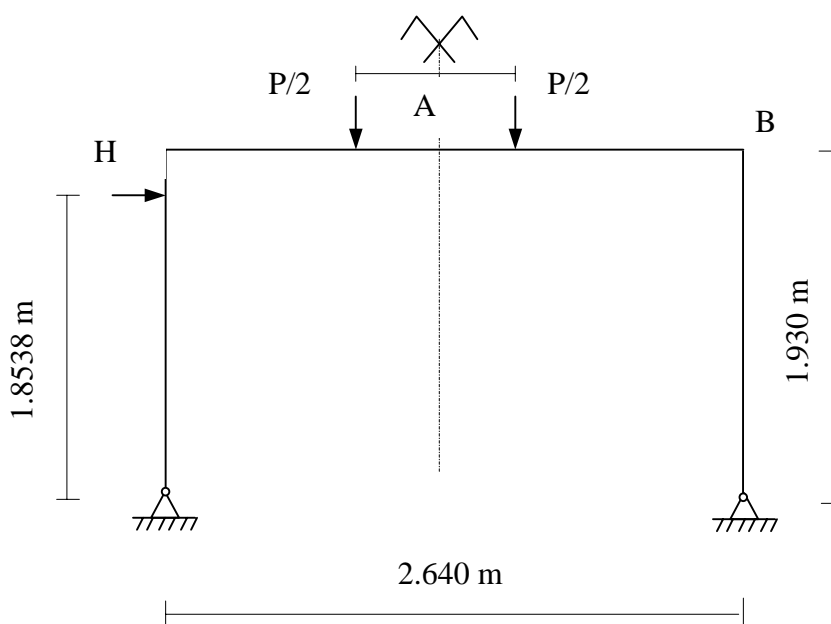


Figure 4. 15 - Portique de W.B. Cranston : géométrie et chargement

Ce portique présente une ouverture de 2.64 m et une hauteur de 1.93 m. Il est sollicité horizontalement et verticalement par des forces ponctuelles dont les intensités vérifient la relation :

$$H = \frac{P}{10}$$

La résistance en compression du béton, évaluée à partir d'essais sur des éprouvettes cubiques, est estimée à 40 MPa. Les aciers sont caractérisés par une limite élastique de 278 MPa et un module d'Young de 200 GPa.

La ruine observée expérimentalement intervient par ruine des matériaux constitutifs pour une intensité de la charge P de 45,5 kN.

La disposition longitudinale des aciers n'est, quant à elle, pas entièrement précisée dans la référence [CRA65] et seuls les ferrillages au coin droit du portique ainsi qu'au point d'application des charges P/2 sont donnés. Aussi, nous avons retenu la répartition et les ferrillages adoptés par A. Grelat, B. Espion et O. Naît-Rabah dans leurs simulations.

Le portique est donc découpé en 20 éléments, comme indiqué sur la figure 4.16, et les ferrailages correspondants sont précisés sur la figure 4.17 et dans le tableau 4.2.

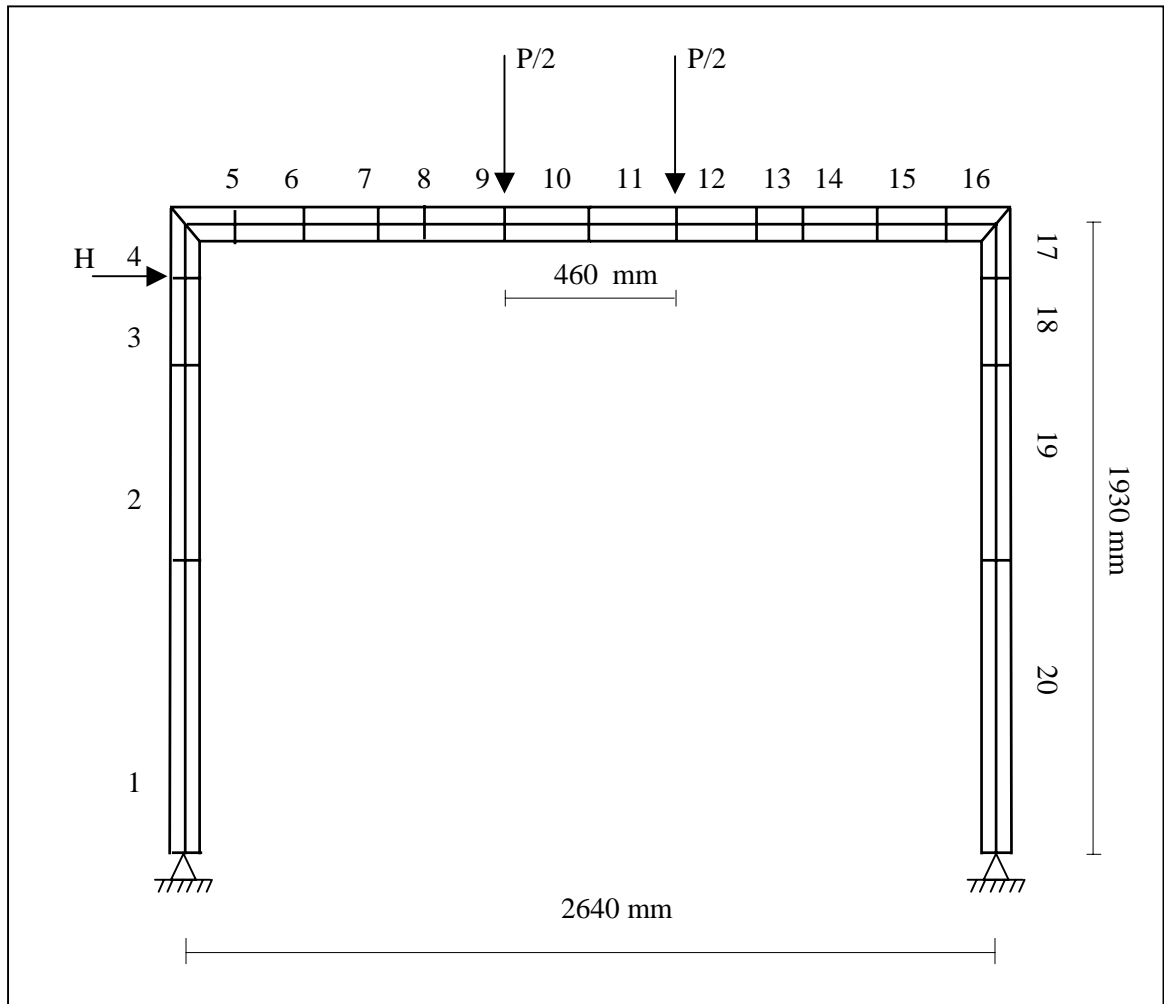


Figure 4. 16 - Subdivision adoptée pour le ferrailage

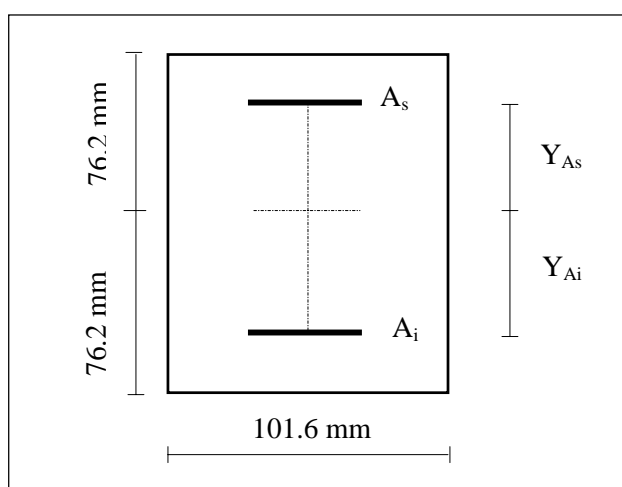


Figure 4. 17 - Ferrailage d'une section

Eléments	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$Y_{As}$ (mm)	$A_i$ (mm <sup>2</sup> )	$Y_{Ai}$ (mm)
1, 20	2 $\phi$ 9,5	62	2 $\phi$ 9,5	62
2, 6, 15, 19	4 $\phi$ 9,5	62	2 $\phi$ 9,5	62
3, 4, 5, 16, 17, 18	6 $\phi$ 9,5	62	2 $\phi$ 9,5	62
7, 14	4 $\phi$ 9,5	62	4 $\phi$ 9,5	62
8, 13	2 $\phi$ 9,5	62	4 $\phi$ 9,5	62
9, 10, 11, 12	2 $\phi$ 9,5	62	6 $\phi$ 9,5	62

Tableau 4. 2 - Caractéristiques des ferrailages pour chaque subdivision

### 4.3.2 Simulations numériques et confrontations

Comme précédemment, les lois de comportement utilisées pour les simulations numériques de la stabilité sont la loi parabole rectangle pour le béton et une loi élastoplastique parfaite pour les aciers. Ce portique est discrétisé à l'aide de 20 éléments finis dont les tailles correspondent aux subdivisions présentées sur la figure 4.16. La simulation de la stabilité de ce portique est effectuée pour un chargement incrémental de pas variables [HAS02], identiques à ceux retenus par les auteurs des autres simulations numériques.

La configuration déformée que nous avons obtenue numériquement pour le chargement précédent la ruine est reportée sur la figure 4.18 ci-dessous, les déplacements étant amplifiés d'un facteur 3 :

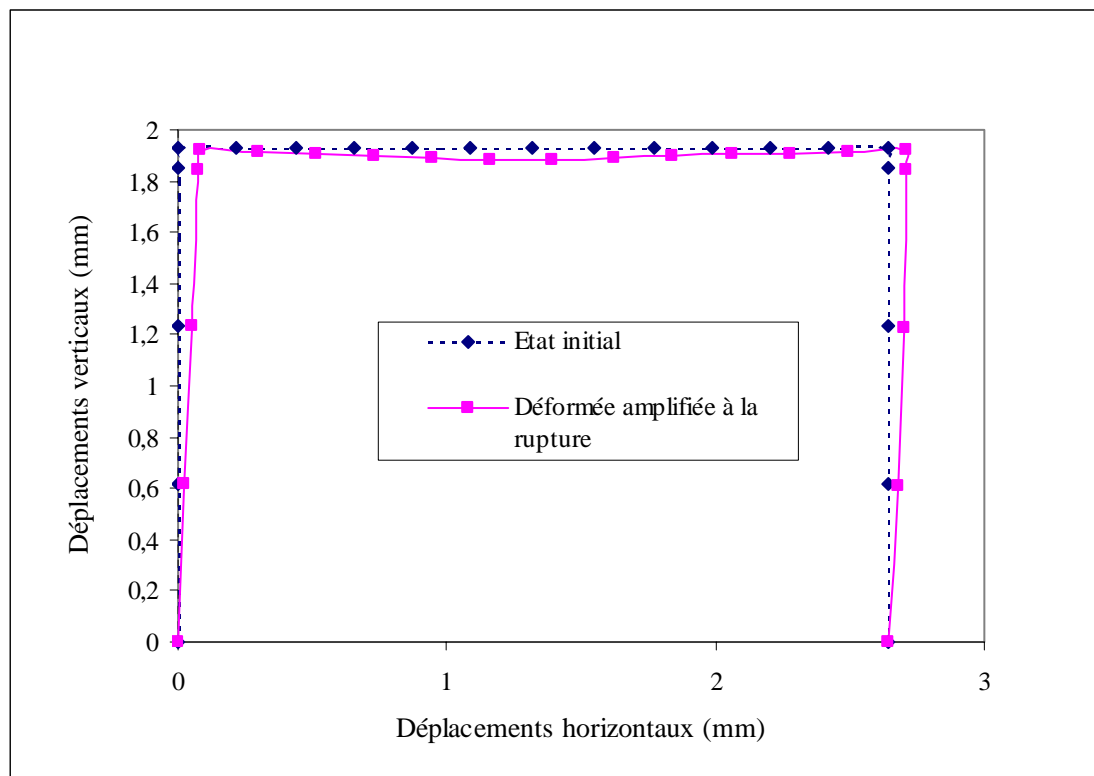


Figure 4. 18 - Déformée à la ruine du portique

Cette ruine intervient numériquement par épuisement des matériaux pour une charge de 45,5 kN. Ce mode de ruine correspond à celui observé expérimentalement. L'outil développé permet donc là encore de prédire correctement le mode de ruine de la structure, comme le résume le tableau 4.3.

	Expérience	Simulation	Ecart (%)
Charge critique (kN)	46,25	45,5	1,62
Flèche critique (mm)	23	23,5	2,17

Tableau 4. 3 - Comparaison résultats numériques / expérience

Nous comparons maintenant les courbes charges-déplacements obtenues numériquement à celles mesurées expérimentalement, ainsi qu'à celles calculées par les autres approches numériques [NAI90], [ROB99].

Ainsi, nous comparons à la figure 4.19 les évolutions des déplacements horizontaux en tête du poteau droit (point B de la figure 4.15) en fonction du chargement appliqué.

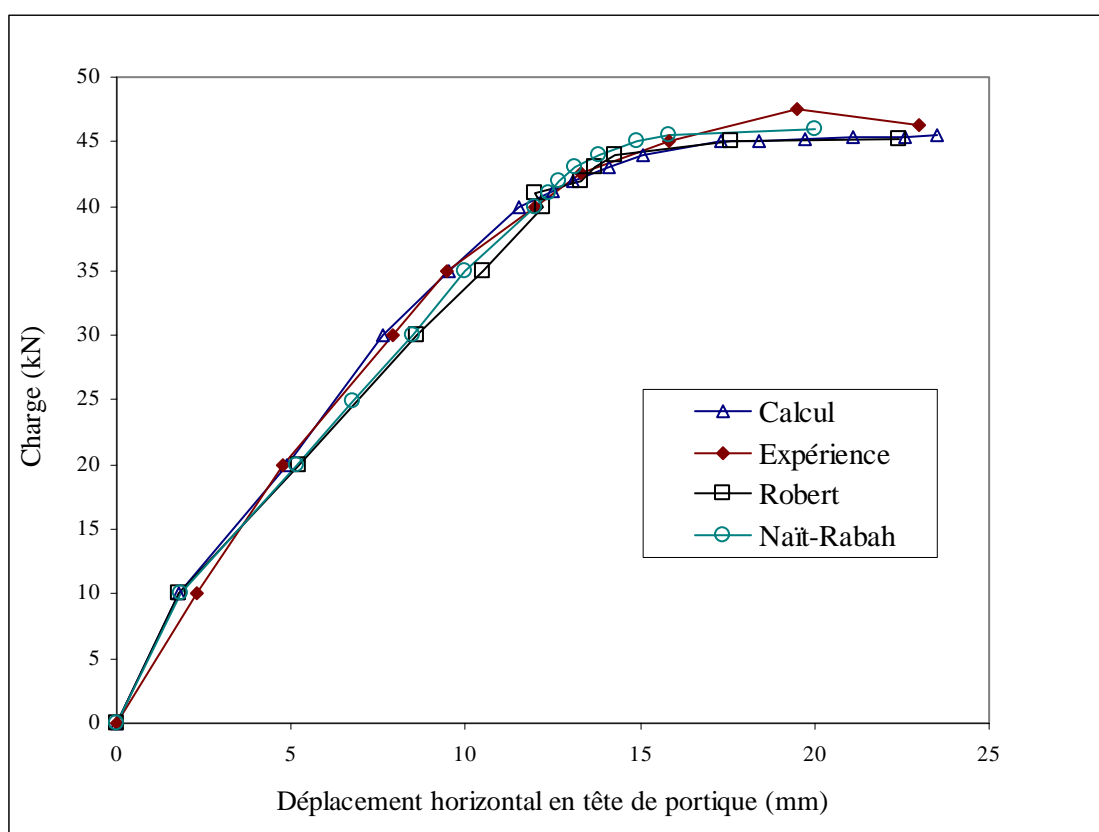


Figure 4. 19 - Confrontations simulations numériques et expérience :  
évolution de la translation horizontale en fonction de la charge  $P$



Les écarts entre les prévisions numériques et les mesures expérimentales sont donnés dans le tableau 4.4 pour les valeurs critiques de la charge de ruine et du déplacement horizontal :

	Expérience	Simulation	Naït-Rabah	Robert
Charge critique (kN)	46.25	45,5	46	45,2
Ecart (%)		1.6	0.54	2.25
Flèche critique (mm)	23	23,5	20	22,5
Ecart (%)		2,17	13,04	2,17

Tableau 4. 4 - Confrontations des différentes simulations numériques avec l'expérience

Ce tableau montre que l'outil proposé prédit avec précision et fiabilité les valeurs critiques tant sur la charge que sur le déplacement horizontal. En dehors de ces points particuliers, on peut également observer une très bonne aptitude du logiciel à restituer le comportement expérimental du portique au cours du chargement comme le montrent les courbes d'erreurs relatives reportées sur la figure 4.20 :

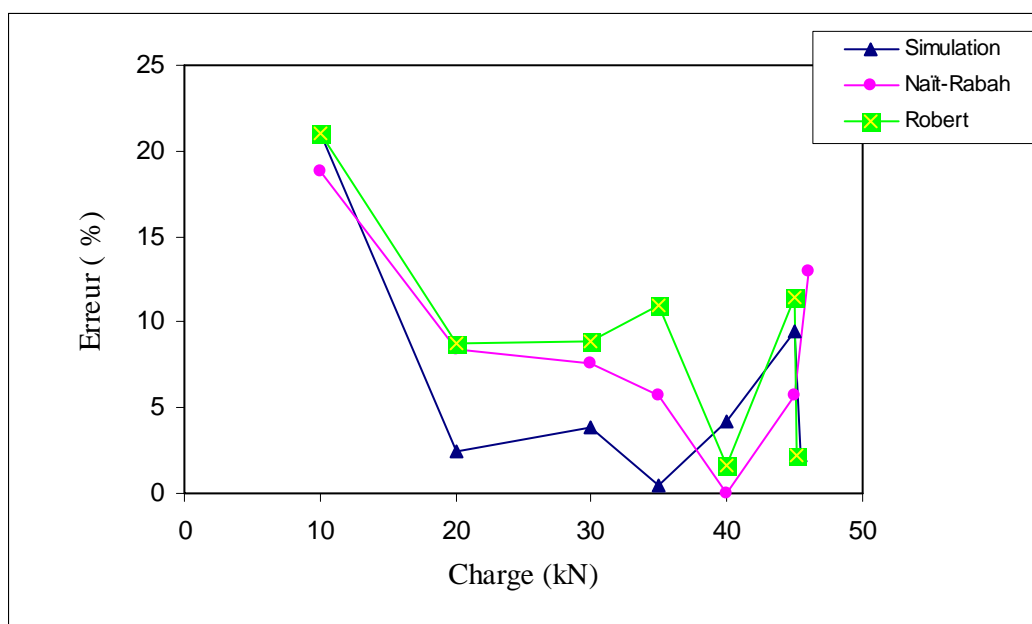


Figure 4. 20 – Erreurs relatives calcul/expérience sur le déplacement horizontal

Plus précisément, la méthode proposée permet de suivre plus fidèlement le comportement de la structure tout au cours du chargement, en particulier dans la zone où apparaissent les phénomènes de fissurations.

Ces observations sont également vérifiées lors de la comparaison de l'évolution des flèches verticales au centre de la traverse (point A de la figure 4.15) présentées sur la figure 4.21 :

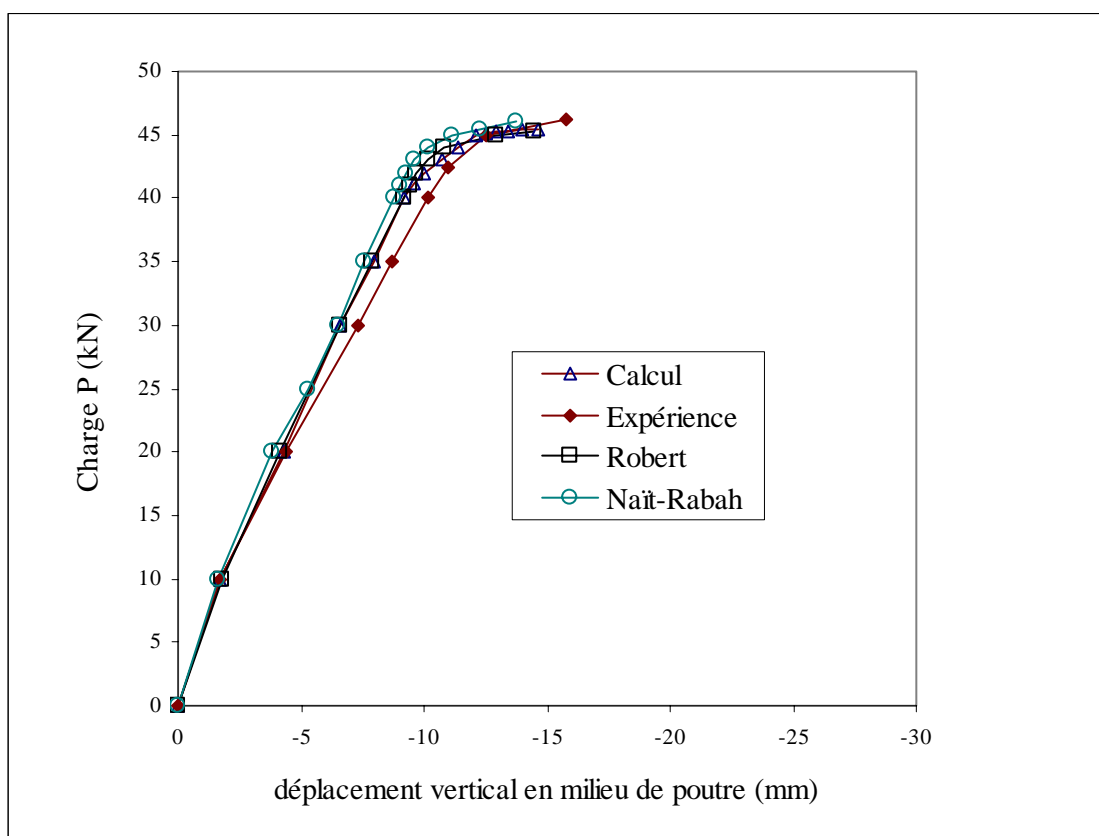


Figure 4. 21 - confrontations simulations numériques et expérience :

*évolution de la flèche verticale en fonction de la charge P*

Cette courbe montre une très bonne corrélation entre les différentes simulations numériques, mais met en évidence, dès l'apparition des phénomènes de fissuration, un écart aux flèches mesurées plus marqué que pour les translations horizontales. Cet écart est vraisemblablement dû à des imprécisions sur les caractéristiques réelles du béton, comme par exemple le module d'élasticité à l'origine ou la distribution des aciers dans

certaines sections du portique. Cependant, dans un souci de validation de l'outil proposé, nous avons été amenés pour ces calculs à reprendre les données adoptées par les autres auteurs dans leurs modélisations.

Les valeurs critiques caractéristiques et les erreurs relatives correspondantes sont reportées dans le tableau 4.5 et la figure 4.22 ci-après.

	Expérience	Simulation	Naït-Rabah	Robert
Flèche critique (mm)	15.8	14.6	13.7	14.5
Ecart (%)		7.5	13.2	8.2

Tableau 4. 5 - Confrontations des différentes simulations numériques avec l'expérience

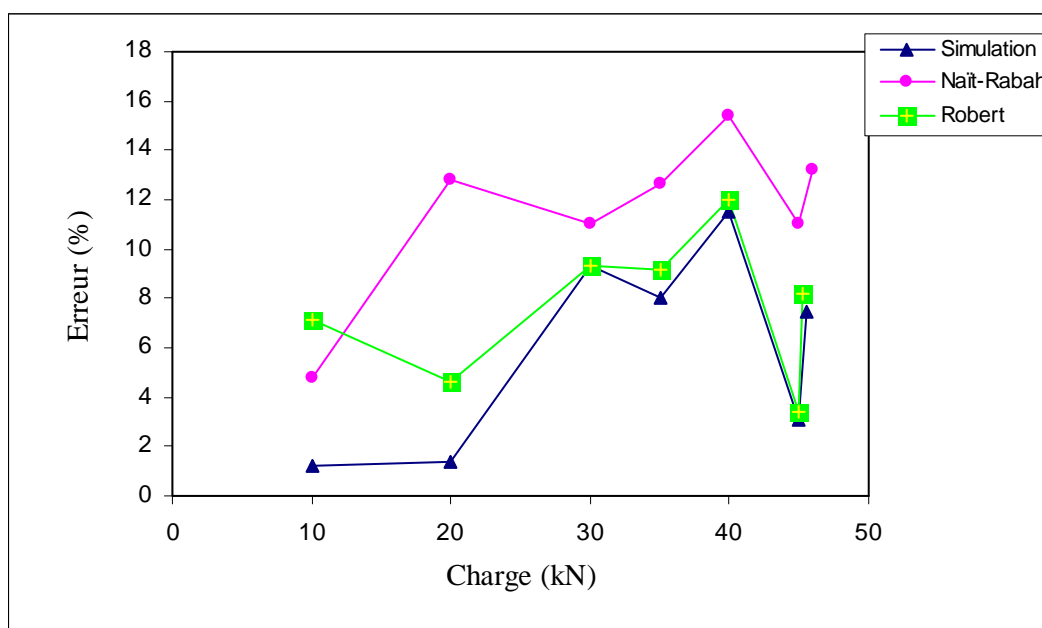


Figure 4. 22 - Erreurs relatives sur le déplacement vertical

La figure 4.22 souligne la très bonne précision fournie par le logiciel sur les déplacements calculés tout au cours du processus de simulation de la stabilité.

### 4.3.3 Validation du processus de remaillage

Cet exemple de portique nous a permis par ailleurs de valider l'implémentation numérique du processus d'actualisation du maillage, présenté au chapitre 3, et qui repose sur les formules de Bresse. Dans ce but, nous avons comparé les déplacements calculés à l'aide du processus de remaillage à ceux fournis par le code de calcul SYSTUS. Cette confrontation oblige à considérer des comportements élastiques linéaires pour les matériaux constitutifs.

Pour chacun des nœuds du maillage, les confrontations des translations horizontales, verticales et des rotations sont présentées sur les figures 4.23, 4.24 et 4.25.

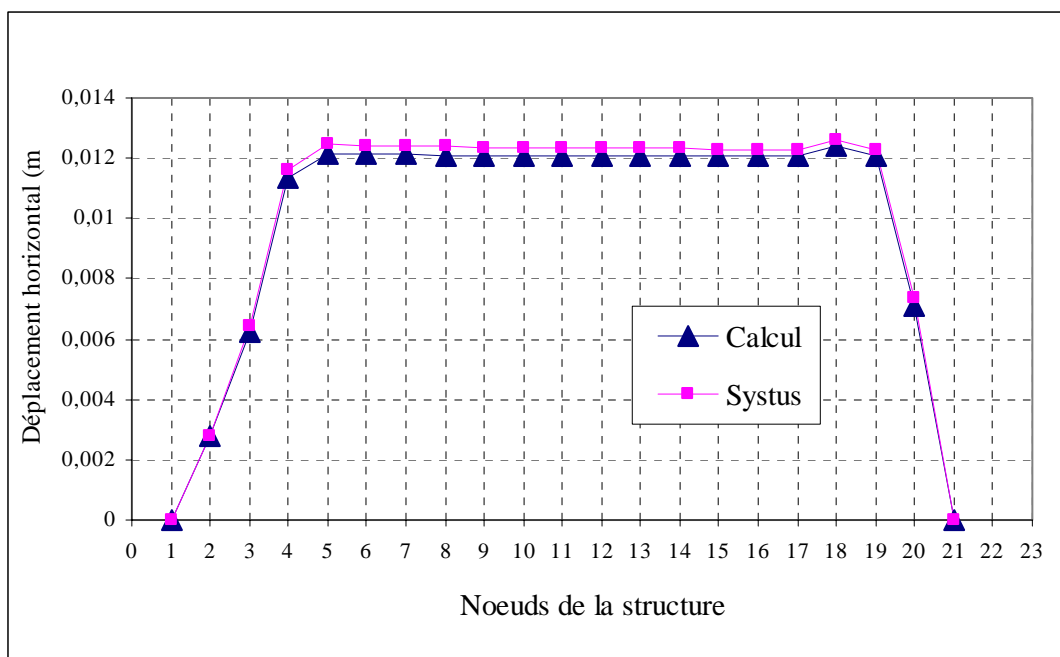


Figure 4. 23 - Validation des translations horizontales

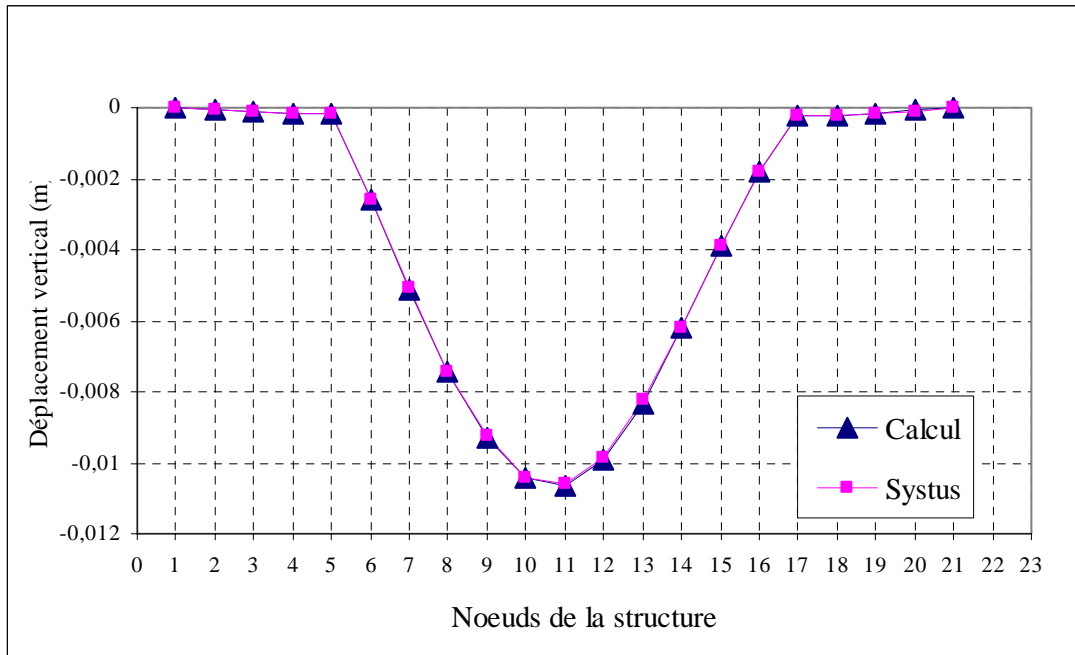


Figure 4. 24 - Validation des translations verticales

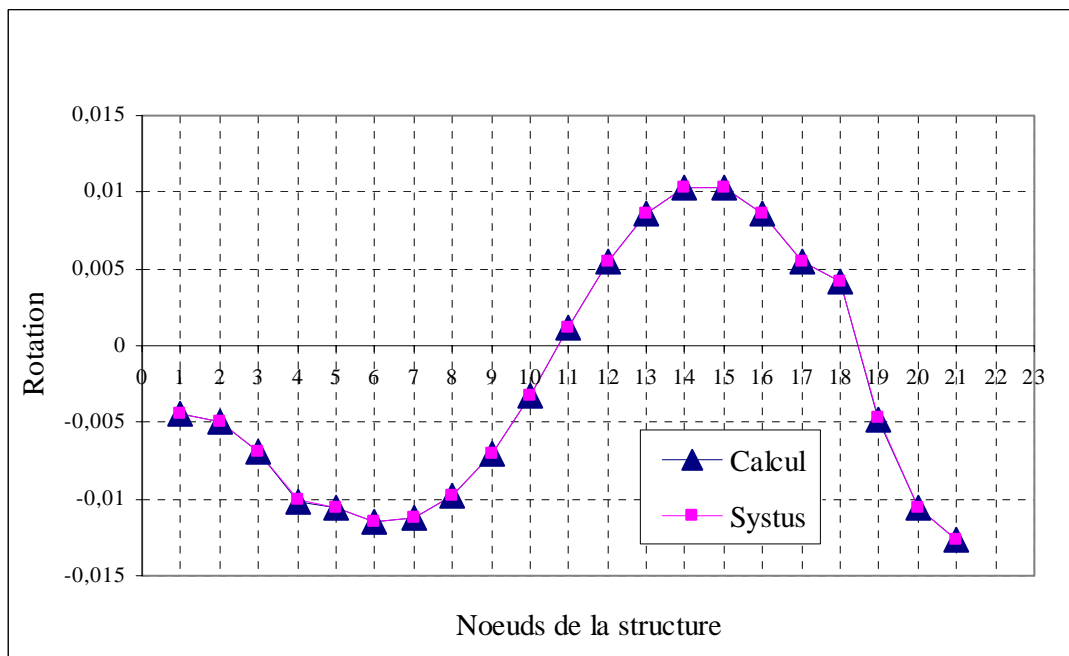


Figure 4. 25 - Validation des rotations

On observe ainsi que les calculs sont validés pour les trois composantes des déplacements.

#### 4.4 Stabilité de cadre

Comme pour les structures précédentes, différents cadres en béton armé ont été testés expérimentalement. Citons par exemple les travaux de de R.W Furlong et P.M. Fergusson sur des cadres rectangulaires de sections constantes, présentant des élancements de poteaux, des longueurs de poutres et des répartitions de charges variables [FUR65].

G. Blomier a étudié trois cadres rectangulaires présentant des poutres en porte-à-faux sollicités par des charges verticales, Figure 4.26 [BLO68]. Les dimensions extérieures et les positions des charges sont identiques, le seul paramètre variable étant le pourcentage d'armatures dans les poutres.

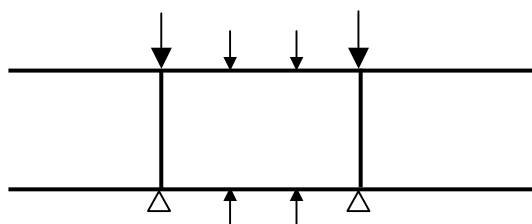


Figure 4. 26 - Cadre de G. Blomier

Dans les années 1980, J.S Ford, D.C Chang et J.I Breen, ont mis en évidence que, en fonction de l'élancement des éléments, les ruines des cadres peuvent survenir par instabilité ou par épuisement des matériaux, [FOR81a], [FOR81b].

Ces essais ont été repris et comparés entre eux par Furlong R.W afin d'établir les recommandations du code de construction américain pour le béton armé et de tester les coefficients de sécurité liés à la réduction des rigidité des sections, [FUR91].

Afin de justifier la robustesse du code sur un autre type de structures, nous avons choisi un des huit cadres rectangulaires étudiés par P.M. Fergusson et J.E. Breen [BRE64], [FER65] représentant une baie d'ossature de bâtiment dont la partie colonne est plus raide

que la partie poutre. Ces différents cadres, sollicités sous charges verticale et horizontale, sont référencés de L1 jusqu'à L8 en fonction de la longueur des poteaux, de la hauteur de section de la poutre et du rapport entre la charge horizontale et verticale. Nous avons retenu le cadre référencé L3, dont la ruine intervient par instabilité [HAS02], qui a également fait l'objet d'études numériques de la part de B Espion [ESP86], de O Naït-Rabah [NAI90] et de F Robert [ROB99].

#### 4.4.1 Caractéristiques du cadre

Les dimensions et les charges appliquées à ce cadre carré simplement appuyé sont données sur la figure 4.27.

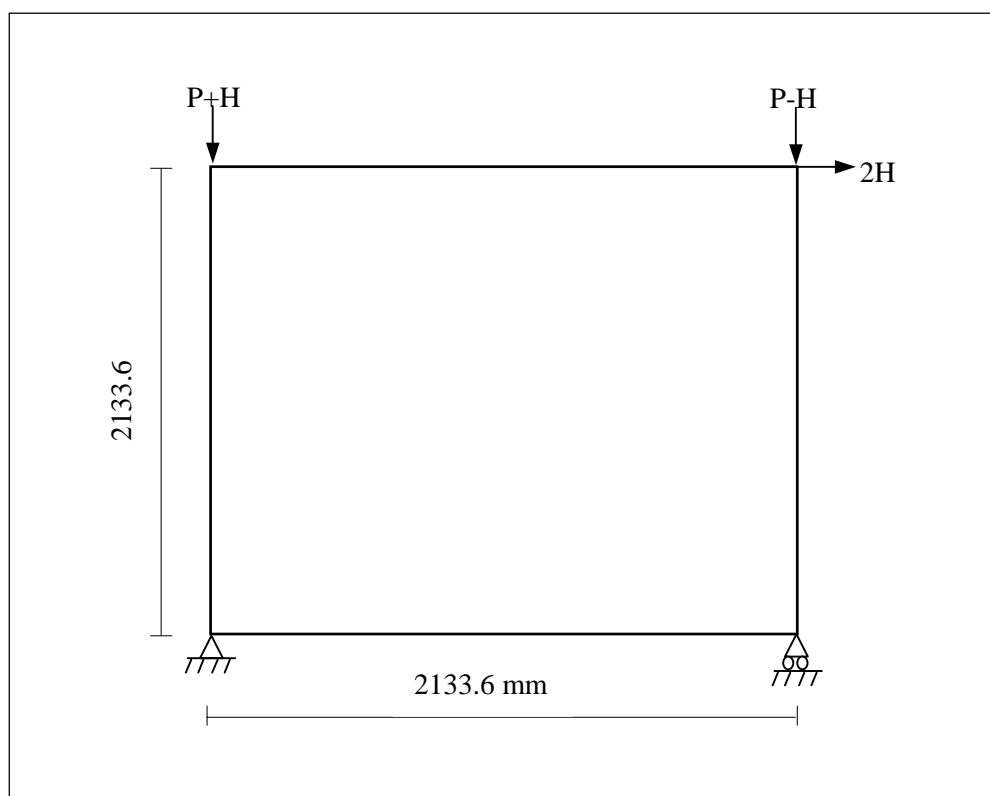


Figure 4. 27 - Cadre de Fergusson et Breen : géométrie et chargement

Les intensités des deux charges P et H sont liées par la relation :

$$H = \frac{P}{100}$$

Le ferrailage des colonnes, symétrique, est composé de deux armatures de diamètre 9,5 mm, en parties supérieure et inférieure. Les poutres sont également ferrillées symétriquement, avec quatre armatures de diamètre 12,7 mm en parties supérieure et inférieure.

Les dimensions respectives des sections droites ainsi que le positionnement de ces armatures sont précisés sur la figure 4.28.

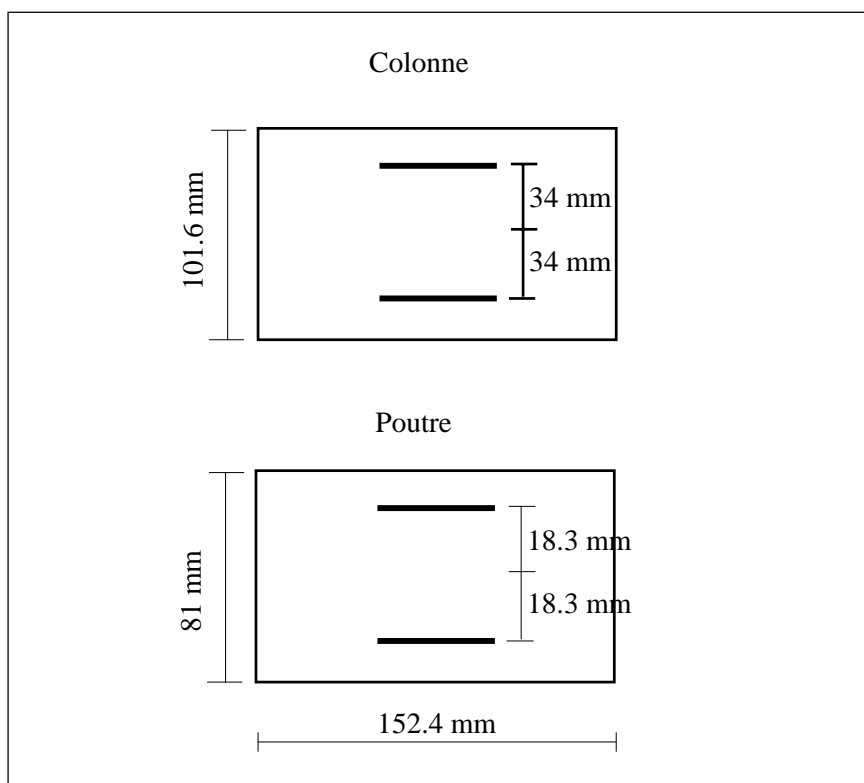


Figure 4. 28 - Ferrailage des sections du cadre

La résistance à la compression du béton constituant ce cadre est évaluée à 22,5 MPa avec une déformation au pic de contrainte de 0,2%. La limite élastique et le module d'Young des aciers sont respectivement de 400 MPa et de 206 MPa.



Expérimentalement, la ruine de ce cadre se produit par instabilité pour une intensité de la charge  $P$  égale à 140,6 kN.

#### 4.4.2 Simulations numériques et confrontations

Le cadre est modélisé en adoptant toujours la loi parabole rectangle pour le béton et une loi élastoplastique parfaite pour les aciers. Ce cadre est maillé à l'aide de 16 éléments finis de taille identique en suivant la discrétisation adoptée par B Espion, O Naït-Rabah et F. Robert.

La simulation de la stabilité de ce cadre est menée par incréments de chargement successifs de 10 kN.

La figure 4.29 représente la déformée du cadre obtenue numériquement à l'instabilité, les déplacements reportés étant amplifiés d'un facteur de 10.

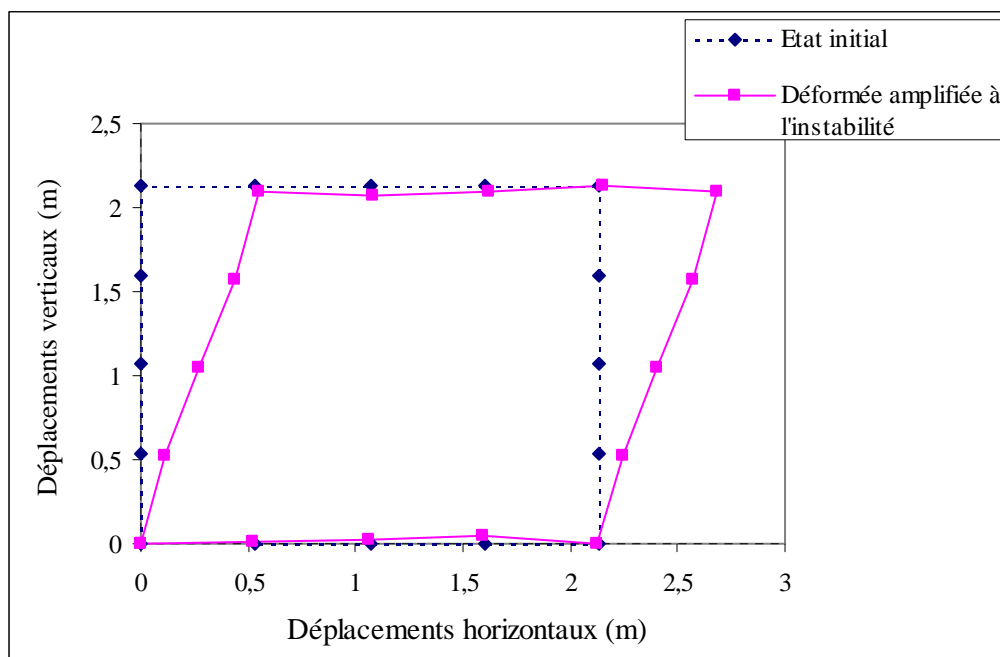


Figure 4. 29 - Déformée à la ruine du cadre de Fergusson et Breen

On constate que les poutres se déforment beaucoup moins que les colonnes.

Ceci s'explique par leur plus grande rigidité volontairement introduite, la campagne expérimentale ayant pour but d'étudier plus spécifiquement l'instabilité des colonnes.

Comme constaté expérimentalement, la ruine observée numériquement est due à une divergence d'équilibre et non pas à la rupture de la section la plus sollicitée. Les valeurs correspondant au charge et flèche critiques sont données dans le tableau 4.6 :

	Expérience	Simulation	Ecart (%)
Charge critique (kN)	140,6	146	3,84
Flèche critique (mm)	63,7	55	13,66

Tableau 4. 6 - comparaison résultats numériques / expérience

Comme initialement observé dans la première application sur le poteau de B Fouré, dans le cas d'une ruine par divergence d'équilibre, les prédictions numériques sont d'une meilleure précision sur la charge de ruine que sur le déplacement critique.

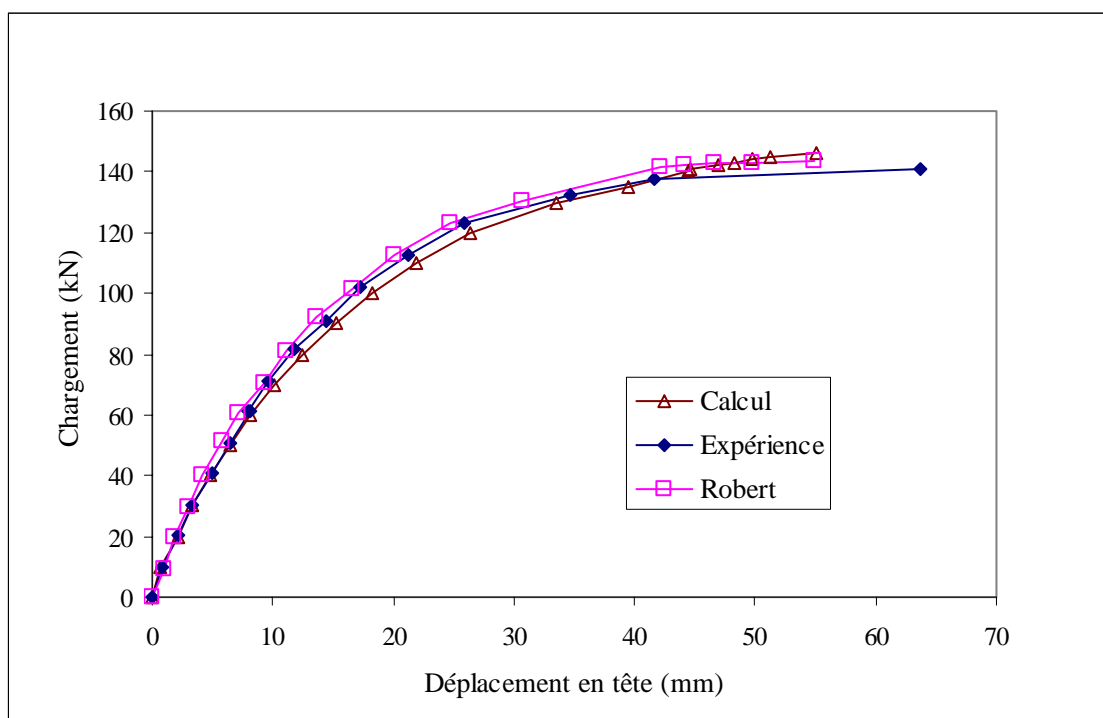


Figure 4. 30 - confrontations simulations numériques et expérience :

évolution de la translation horizontale en fonction de la charge  $P$

La figure 4.30 représente l'évolution de la flèche horizontale en tête des poteaux en fonction de l'intensité de la charge  $P$  appliquée. Les confrontations sont effectuées par rapport aux résultats expérimentaux et à la modélisation de F. Robert qui tient compte également des deux non-linéarités géométrique et matérielle.

Les valeurs de la charge de ruine et du déplacement critique sont résumées dans le tableau 4.7.

	Expérience	Simulation	Robert
Charge critique (kN)	140,6	146	143,5
Ecart (%)		3,84	2,06
Flèche critique (mm)	63,7	55	54,2
Ecart (%)		13,66	14,91

Tableau 4. 7 - Confrontations des simulations numériques avec l'expérience

Là encore, comme pour le portique, les deux approches numériques restent voisines et présentent une bonne corrélation avec la réponse expérimentale. Les écarts sur les flèches ultimes sont néanmoins dans cette application plus importants. On peut proposer deux explications possibles : une incertitude sur les données "matériaux" suggérée par la bonne adéquation entre les deux modèles ; un pas de chargement petit dès le début de la simulation qui peut entraîner une dégradation prématurée des sections droites comme constatée au paragraphe 4.2.3 sur le poteau de B. Fouré.

## 4.5 Conclusion

Les structures retenues pour l'application du logiciel développé ont fait l'objet d'essais expérimentaux et de simulations numériques effectuées par d'autres codes de calcul par éléments finis.

En premier, un poteau tiré d'une série importante d'expériences mises en place par B Fouré a été étudié. Les comparaisons entre les résultats de la simulation et ceux issus de l'essai expérimental ainsi que d'autres simulations numériques montrent une assez bonne approximation de la charge critique. De plus l'analyse en terme d'erreur par rapport aux résultats expérimentaux, teste l'influence des pas de charge, les différents maillages ainsi

que la prise en compte de la non-linéarité matérielle et du comportement unilatéral du béton. A l'issue de cette analyse, les constatations faites sont les suivantes :

- pour les faibles pas de charge, la simulation a tendance à s'écarter de l'expérience. Le phénomène peut être lié à la modélisation du comportement unilatéral du béton tel qu'il est stipulé par les règlements, négligeant la partie tendue du béton dans une section. La prise en compte d'une autre loi de comportement considérant le béton tendu, améliorerait les résultats à ce niveau,
- L'influence du maillage se caractérise, comme attendu, par une précision est d'autant plus optimale que le maillage est raffiné,
- Enfin, la comparaison des résultats issues de deux simulation : l'une avec et l'autre sans non-linéarité matérielle, justifient bien la prise en compte de celle-ci dans la prévision de la charge de ruine

L'étude du portique de Cranston donne des résultats numériques avec une assez bonne corrélation avec l'expérience notamment la ruine qui intervient par épuisement du matériau.

Enfin un autre type de structure en béton armé, un cadre fermé a été modélisé. Sa ruine intervient par instabilité. Là encore la confrontation avec l'expérience aussi bien de la charge de ruine que de l'évolution de la flèche en fonction de la charge, montre la capacité de l'outil à reproduire un comportement jusqu'à la ruine

## Conclusion générale

La modélisation et la simulation du flambement des structures élancées en béton armé ont constitué les principaux objectifs de ce travail de thèse. Les mises en œuvre numériques correspondantes ont été menées en couplage avec le code de calcul par éléments finis SYSTUS. Les méthodologies proposées ont nécessité de prendre en compte, d'une part, la non-linéarité géométrique pour reproduire le comportement des structures élancées et d'autre part, la non-linéarité matérielle du béton et de son comportement unilatéral.

Le mémoire présente un rappel des aspects théoriques sur le flambement des structures élastiques homogènes et, dans une description Lagrangienne, les équations d'équilibre qui régissent le problème. La stabilité de cet équilibre est introduite, ensuite, selon une approche énergétique. Des méthodes de résolutions numériques sont présentées en vue d'une implémentation numérique de la non-linéarité géométrique seule puis couplée à la non-linéarité matérielle. Pour la stabilité, la résolution numérique diffère selon que la structure est soumise à de petits ou à de grands déplacements.

Pour les structures élancées en béton armé le problème est traité avec une description Lagrangienne actualisée. Dans la prise en compte de la non-linéarité géométrique, les variables spatiales sont définies par rapport à la configuration déformée antérieure. Pour cela une étude incrémentale est adoptée dans laquelle nous procédons à l'analyse de stabilité de la structure pour chaque incrément de charge. Avec un processus itératif, le critère de stabilité choisi teste l'amplification des moments du second ordre.

La considération du matériau béton armé a nécessité, de part sa nature hétérogène, la mise en place d'un processus d'homogénéisation des caractéristiques géométriques et mécaniques des sections. La prise en compte, dans ce processus d'homogénéisation, de la non-linéarité matérielle et de du comportement unilatéral du béton modélisés par la loi réglementaire parabole-rectangle, a permis d'obtenir un comportement non linéaire homogénéisé d'une section en béton armé. Celui-ci permet en pratique de calculer les déformations réelles dans la section. Ces déformations permettent ensuite d'actualiser les caractéristiques géométriques et mécaniques ainsi que les déplacements réels de la structure.

La méthode de calcul élaborée est implémentée dans le code de calcul par éléments finis SYSTUS à l'aide du langage de programmation SIL intégré au code. Les procédures spécifiques au traitement des deux non-linéarités et de la stabilité sont implémentées dépendamment des fonctions d'accès aux structures du code de calcul.

Avant de mettre en application la méthode de calcul, sa fiabilité a été testée par une série de validations et de confrontations à des méthodes explicites et expérimentales. Les comparaisons sont satisfaisantes et sont en plus confortées par les résultats, comparables à ceux de la littérature, d'une étude d'influence de paramètres géométriques et mécaniques sur la charge critique.

L'application du logiciel développé a été réalisée sur trois types de structures usuelles en béton armé. La ruine par épuisement du matériau d'un portique et par instabilité d'un poteau et d'un cadre montre la capacité de l'outil à reproduire le comportement dans les deux cas de figures. Ces structures ont fait l'objet d'essais expérimentaux et de simulations numériques. Cette comparaison des résultats montre une assez bonne approximation de la charge de ruine. Cette comparaison est complétée par une étude de sensibilité à deux paramètres numériques : le pas de chargement et le maillage, de la méthode de calcul, prenant comme référence les résultats expérimentaux. Les faibles valeurs du pas de chargement ont tendance à écarter la courbe de simulation de la courbe expérimentale. Ceci pourrait être la conséquence directe d'une dégradation précoce de la section droite en béton armé imputée au choix d'un comportement unilatéral du béton dans lequel on néglige la partie tendue des sections. La sensibilité du maillage est, par contre, celle attendue, à savoir une précision d'autant plus optimale que le maillage est raffiné.

En conclusion, quatre aspects essentiels ont été traités dans ce travail : la prise en compte de la non-linéarité matérielle et du comportement unilatéral du béton et celle de la non-linéarité géométrique avec la mise en place d'un critère de stabilité. Le couplage des deux types de non-linéarité a permis de simuler, par un chargement incrémental, le comportement de structures en béton armé jusqu'à la ruine par instabilité de la structure ou par épuisement des matériaux. L'outil numérique élaboré s'adapte, de part son couplage avec un code de calcul par éléments finis, à toutes les structures envisagées dans les applications en génie civil, sans restriction sur le nombre d'éléments structuraux, le type de charge ou le degré d'hyperstaticité.

L'ensemble des validations effectuées montre que l'outil élaboré prédit avec précision la charge critique d'instabilité des structures étudiées. Les résultats des applications à différentes structures en béton armé ont révélé une bonne corrélation avec les résultats publiés, ce qui conforte la validité de l'outil développé.

La méthode utilisée peut constituer un outil de calcul destiné à la prédiction des charges de ruine des constructions et à l'interprétation de résultats d'essais effectués en laboratoire ou de mesures in situ. S'inscrivant dans une philosophie d'états limites, cette

méthode peut constituer également un outil de vérification opérationnel dans de nombreux cas pratiques. Son intérêt est certain dans ce domaine par l'évolution de la réglementation qui tend à imposer, à juste titre, le calcul à l'état limite ultime.

Enfin, l'enrichissement du logiciel développé par d'autres lois constitutives permettrait de mieux rendre compte du comportement réel des structures en béton armé et par conséquent de compléter avantageusement ses capacités.

---

## Bibliographie

### A

[ANG73] ANGEL L., LAZARO, ROWLAND JR., Full Range Analysis of Concreet Frames, *Journal of the Structural Division*, august 1973.

[AOU98] AOUAMEUR A., Analyse non linéaire matérielle et géométrique des structures coques en béton armé sous chargements statiques et dynamiques, thèse de doctorat, ENPC, 1998.

### B

[BAT91] BATOZ JL., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Edition Hermès, Paris 1990.

[BAZ91] BAZANt Z. P. & CEDOLIN L., *Stability of Structures*, Oxford University Press, New York Oxford, 1991.

[BJO85] BJORRHOVDE R., Approche d'analyse de résistance au flambement, *Revue de la construction métallique*, 1985.

[BEA68] BEAUFAIT F, WILLIAMS R.R. Experimental study of reinforced concrete frames subjected to alternating sway forces, *Journal of American Concrete Institute (ACI)*.Titlle 65.76, vol 76, Nov. 1968.

[BLO68] BLOMIER G., Effect of yielding of restraints on slender concret colomns in braced frames, thèse de doctorat, University of Texas 1968.

[BOU97] BOUBERGUIG A., ROSSIER S.,FAVRE R., CHARIF H., Calcul non linéaire du béton armé et précontraint, *Revue française du Génie civil*, Vol 1-n°3, pages 503 à 568, 1997.

[BRE64] BREEN J.E, FERGUSSON P.M., The restrained long concrete column as a part of a rectangular frame, *Journal of American Concrete Institute (ACI)*, Mai 1964.

### C

[CAP75] CAPRA A., Flambement des poteaux en béton armé soumis à des forces horizontales, *Annales de l'institut Technique du Bâtiment et des Travaux publics*, Janvier 1975.



[CHA91] CHAFRA M., Simulation Numérique du Comportement Non-linéaire des Ossatures spatiales en Béton Armé, mémoire de DEA. Paris 6, 1991

[CHA91] CHAHROUR I, Contribution à l'analyse non linéaire matérielle et géométrique des coques en béton armé, thèse de doctorat, INSA LYON, 1991.

[CIA86] CIARLET P.G., *Elasticité tridimensionnelle*, Edition Masson, 1986.

[CIA90] CIARLET P.G., *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Edition Masson, 1990.

[COM95] COMBESCURE A., Etude de la stabilité non-linéaire géométrique et non-linéaire matériau des coques minces, habilitation à diriger des recherches, INSA de LYON et UCB LYON I, 1995.

[CON70] CONNER H.W., KAAR P.H., CORLEY W.G., Moment redistribution in precast concrete frame, *Journal of structural division*, March 1970.

[CRA97] CRANERO R., *Bases pour la résistance des matériaux*, Edition Ellipses, 1997.

[CRA65] CRANSTON W. B., *Tests on Reinforced Concrete Frames*, Technic Report of Cement and Concreet Association, August 1965.

[CUR93] CURNIER A., *Méthodes numériques en mécanique des solides*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1993.

## D

[DEM92] De MARNEFFE L, HERMAN, A. Etude du flambement d'ensemble d'une structure métallique, Le tétrapode de base d'un Pylône pour ligne à haute tension, *Revue de la construction métallique*, N°3, 1992.

[DEV89] De VILLE De GOYET V, L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section symétrique et asymétrique, thèse de doctorat , Université de liège, 1989.

[DHA84] DHATT G.S., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S.A., 2<sup>ème</sup> édition, 1984.

[DUV90] DUVAUT, G., *Mécanique des milieux continus*, Edition Masson, 1990.

---

**E**

[ERN73] ERNST G.C., SMITH G.D., RIVELAND A.R., PIERCE D.N., Basic reinforced concrete frame performance under vertical and lateral loads, *Journal of American Concrete Institute (ACI)*, n°70.28, 1973.

[ESP86] ESPION B., Contribution à l'analyse non linéaire des ossatures planes, Application aux structures en béton armé, thèse de doctorat, Université libre de Bruxelles, 1986.

**F**

[FEA72] FEASSEL P., MORISSET A., FOURE B., Flambement des poteaux en béton armé, *Annales de l'institut Technique du Bâtiment et des Travaux publics*, 1972.

[FEA81] FEASSEL P., LACOMBE G., GAILLARD M., La construction par éléments préfabriqués des piles du viaduc de Bellegarde, *Annales de l'institut Technique du Bâtiment et des Travaux publics*, 1981.

[FER65] FERGUSON P.M, BREEN J.E., Investigation of the long concrete column in a frame subject to lateral loads, *Journal of American Concrete Institute (ACI)*, n°4, 1965.

[FOR81a] FORD J.S., CHANG D.C., BREEN J.I., Experimental and analytical modeling of unbraced multiplanar concrete frames, *Journal of American Concrete Institute (ACI)*, n°78-2, February 1981.

[FOR81b] FORD J.S., CHANG D.C., BREEN J.I., Behavior of unbraced multiplanar concrete frames, *Journal of American Concrete Institute (ACI)*, n°78-8, April 1981.

[FOU78] FOURE B., Le flambement des poteaux compte tenu du fluage du béton, *Annales de l'institut Technique du Bâtiment et des Travaux publics, Série Méthodes de Calcul*, Mars 1978.

[FRE94] FREY F., *Analyses des structures et milieux continus*, Mécanique des structures. Traité de génie civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, vol 2, Edition Presses Polytechniques Universitaires Romandes, Lausanne, 1994.

[FUR65] FURLONG R.W., Tests of frames with columns in single curvature, *Journal of American Concrete Institute (ACI)*, SP 13 Paper n°3, 1965.

[FUR91] FURLONG R.W., Elastic rational analysis and tests of unbraced concrete frames, *Progress in structural Engineering*, pp 71-83, Kluwer Academic Publishers Netherlands, 1991.

---

## G

[GAL84] GALEA Y., Flambement des structures planes à barres, *Revue de la construction métallique*, N°3, 1984.

[GAY89] GAY D., *Matériaux composites*, Traité des nouvelles technologies, Série mécanique, Edition Hermès, Paris 1989.

[GER95] GERMAIN P., MULLER P., Introduction à la mécanique des milieux continus, Masson, 1995.

[GER96] GERADIN M., RIXEN D., *Théorie des vibrations*, Application à la dynamique des structures, Edition Masson, Paris, 1996.

0

[GHA98] GHAVAMIAN S., MAZARS J. , Analyse du comportement sismique des structures à grand élancement, Modélisation simplifiée du comportement , 4<sup>ème</sup> colloque National du génie parasismique, AFPS, Saint-Rémy-lès-Chevreuse, année 1998.

[GHA98] GHAVAMIAN S., Méthode simplifiée pour la simulation du comportement sismique des structures en béton armé, thèse de doctorat , LMT-Cachan, 1998.

[GRA97] GRAVEUR J.C., *Modélisation des structures, Calcul par éléments finis avec problèmes corrigés*, Edition Masson, Paris, 1997.

[GRE76] GRELAT A., Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques planes en béton armé chargées dans leur plan. Analyse bibliographique, Rapport final, CEBTP, 1976.

[GRE78] GRELAT A., Calcul non linéaire des ossatures en béton armé, thèse de doctorat, Paris VI, 1978.

## H

[HAF93] HAFTKA R.T., GÜRDAL Z., *Elements of Structural Optimization*, Série Solid Mechanics and its Applications, Ed. Kluwer Academic Publishers, 1993.

[HAS99] HASSANI S., ORTOLA S., DUMONTET, H, CABRILLAC, R. Modélisation des structures élancées en béton armé, 2<sup>ème</sup> Congrès Universitaire de Génie Civil, AUGC, Poitiers, mai 1999.

---

[HAS99] HASSANI, S, CABRILLAC, R., Numerical simulation of the non linear behaviour of reinforced concrete structures, 12<sup>th</sup> International Conference on Composite Materials, Paris, juillet 1999.

[HAS99] HASSANI S., ORTOLA S., DUMONTET H., CABRILLAC R., Modélisation numérique des structures élancées en béton armé, *Revue Française de Génie Civil*, Vol.3 n°7-8, décembre 1999.

[HAS02] HASSANI S., ORTOLA S., DUMONTET H., CABRILLAC R., *Stabilité des structures élancées en béton armé : confrontations simulations / expériences*, 5<sup>ème</sup> Congrès Universitaire de Génie Civil, AUGC, Toulouse, 30-31 mai 2002.

[HAS02] HASSANI S., ORTOLA S., DUMONTET H., CABRILLAC R., *Stability of slender reinforced concrete structures : simulations and experiments*, 9<sup>th</sup> International Conference on Composite Engineering, San Diego, California, USA, July 01-06-2002.

[HER74] HERMITE R., *Flambage et stabilité*. Ed Eyrolles, Paris 1974.

[HOF95] HOFSTTETER G., MANG H.A., *Computational Mechanics of reinforced concrete structures*, Braunschweig, Germany 1995.

## K

[KLA82] KLAUS-JURDAN B., *Finite element Procedures in engineering analysis*, Edition Printice-Hall, USA, 1982.

## L

[LAB91] LA BORDERIE C., *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable. Modélisation et application à l'analyse de structures en béton*, Thèse de doctorat à Paris 6, 1991,

[LAZ71] LAZARO A.L., *Analysis of the full range behaviour of reinforced concrete beams and frames*, PHD, Prinston Univesity, 1971.

[LEM85] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., *Mécanique des matériaux solides*, Edition Dunod. Paris 1985.

[LUC96] LUCQUIN B., PIRONNEAU O., *Introduction au calcul scientifique*, Edition Masson, 1996.

---

## M

[MAC65] MAC GREGOR J., GBARTER S.L., Long eccentrically loaded concrete columns bent in double curvature. *Journal of American Concrete Institute (AC)*. Paper n° 6 1965.

[MAZ84] MAZARS, J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de Doctorat ENPC 1984.Paris.

[MAZ98] MAZARS J., GHAVAMIAN Sh., RAGUENEAU F., Efficos Finite element technique in predicting the behaviour of R.C. structures under severe loading. The French technology of concrete, 13<sup>th</sup> FiP congress, Ed. AFPC-AFREM, Paris, pp.59-72.

[MEH69] MEHMEL A., SCHWARZ H., KASPAREK K.H., MAKOWI J., Tragverhalten Ausmitting beanspruchter Stabelbetondruckglieder, *D.A.f.Stb*, 1969.

[MOR75] MORISSET A., Stabilité des piles et des pylônes, *Annales de l'institut Technique du Bâtiment et des Travaux publics*, 1975.

## N

[NAI90] NAIT-RABAH O., Simulation numérique des ossatures en béton armé, thèse de doctorat, École Centrale Paris, 1990.

## O

[OUI91] OUIIN J., *Mécanique des structures*, Edition Castella, 1991.

## P

[PAC96] PACOSTE C., ERIKSSON A., Beam element in instability problems, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, n°144, pp 163-197, 1996.

[PER92] PERCHAT J., ROUX J., *Pratique du BAEL 91*, Edition Eyrolles, 1992.

[PRA95] PRAT M., *La modélisation des ouvrages, Emploi des éléments finis en génie civil*, Edition Hermès, 1995.

[PRA97] PRAT M., *Calcul des ouvrages généraux de construction. Emploi des éléments finis en génie civil*, Edition Hermès, 1997.

## R

[REA65] READ J.B., Testing to destruction of Full-size Portal Frames, *Technical Report of Cement and Concreet Association*, London 1965.

[REA80] READ F.N., FURLON R.W., Behaviour of Unbraced Reinforced Concrete Frames *ACI*, July-August 1980.

[ROB99] ROBERT F., Contribution à l'Analyse Non Linéaire Géométrique et Matérielle des Ossatures Spatiales en Génie Civil, Application aux ouvrages d'arts, thèse de doctorat, INSA Lyon, 1999.

[ROW71] ROWLAND RICHARD JR., ANGEL L., LAZARO, Limit analysis of a reinforced concrete frame, *Journal of American Concrete Institute (ACI)*, pp 748-755, October 1971.

## S

[SAL88] SALENÇON J., *Mécanique des milieux continus*, Edition Ellipses 1988.

[SON95] QUOC-SON. N., *Stabilité des structures élastiques*, Springer-Verlag, 1995.

[SON2000] QUOC-SON. N., *Stabilité et mécanique non linéaire*, Edition Hermes, 2000.

## T

[TIM66] TIMOSHENKO S.P., *Théorie de la stabilité élastique*, Traduit par MOREL.J., Edition Dunod, 1966.

[TIM92] TIMSAH Y., Simulation numériques des structures en béton armé ou précontraint hors du domaine linéaire, thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, SES et SETRA, 1992.

## U

[ULM94] ULM F.J., Modélisation élastoplastique avec endommagement du béton de structure. Application aux structures en béton armé et précontraint, thèse de doctorat, ENPC, Paris 1994.

## V

[VIR78] VIRLOGEUX M. Justification réglementaire des pièces soumises aux effets du second ordre selon les principes de calculs aux états limites : problèmes liés à la sécurité. *Annales de l'ITBTP, Série Méthodes de Calcul*, Mars 1978.

[VIR86] VIRLOGEUX M., M'RAD A. Etude d'une section en élasticité non linéaire. Application aux sections en béton armé ou précontraint et aux sections mixtes, *Annales de l'ITBTP*, n°444, pp 3.73, 1986.

[VIR88] VIRLOGEUX M., Second order analysis of concrete cables stayed bridges, Seminar on cable stayed bridgies, India, 1988.

## Z

[ZIE77] ZIENKIEWICZ O. C., *The finite element method*, 3<sup>rd</sup> edition, McGrawHill, 1977.

## Annexe 1 : PROGRAMME DE CALCUL

```

liste param$, textval$,parram$,textttval$;
variable v[16],vv[16],at1[2,2],at2[2,2],dep[6],depp[3],
uu[32],u[32],ww[32],ddu[32],ddv[32],cdu[32],cdv[32],cdw[32];
liste
All=[141.7,141.7,141.7,141.7,490.6,490.6,490.6,490.6,141.7,141.7,141.7,141.7,49
0.6,490.6,490.6,490.6];
liste
AA=[141.7,141.7,141.7,141.7,490.6,490.6,490.6,490.6,141.7,141.7,141.7,141.7,490
.6,490.6,490.6,490.6];
liste
hh=[0.1016,0.1016,0.1016,0.1016,0.081,0.081,0.081,0.081,0.1016,0.1016,0.1016,0.
1016,0.081,0.081,0.081,0.081];
liste
b=[0.1524,0.1524,0.1524,0.1524,0.1524,0.1524,0.1524,0.1524,0.1524,0.1524,0.1524
,0.1524,0.1524,0.1524,0.1524,0.1524];
liste
dd1=[0.0168,0.0168,0.0168,0.0168,0.0222,0.0222,0.0222,0.0222,0.0168,0.0168,0.01
68,0.0168,0.0222,0.0222,0.0222,0.0222];
variable
xx[32],yy[32],asin[32],acos[32],dx[32],d2x[32],du[32],dv[32],dus[32],dvs[32],dw
[32],xMm12[32],xMm[21,2],ac[3],acc[3],n;
variable
xnn[21,2],xn[32],xt[21,2],xm1[32],aasin[32],aacos[32],eMM[32],eM[32],eMR[32],dM
[32],gm0[32],gm[32],rEe[32],xie[32],cx[32],cy[32], n$;
variable dd[32],As[32],At[32],Ar[32],Ab[32],xib[32],xia[32];
variable
xes=206000,fc=22.5,iter=30,jiter=25,epsi=0.001,sigmae=410,xm,xu,xr,arret;
variable charN=1,no,rEb[32],rGe[32],rGb[32],rGbe[32],rGa[32],
xiie[32],rEbe[32],xxu[32], yuu[32],xm2[32],RR[32];

initialiser_liste(param$);
initialiser_liste(parram$);
initialiser_liste(textval$);
initialiser_liste(textttval$);

//fermer_fichier(na);

//chois du type de calcul
//***** (lin=1 ==> calcul lineaire)
// (lin=2 ==> calcul non-lineaire)

//lin=1;
lin=2;

//creation d un fichier conditions initiales
systus_fichier("depks2.dat","coca");

```



---

```
//ouverture d'un fichier d'ecriture
na=ouvrir_fichier("resucad","ecriture");
```

### DONNEES POUR SYSTUS

```
epsilon=0.002;

//xe1=2*fc/epsilon;
//xe1=2*0.85*fc/epsilon;
xe1=2*0.85*fc/(epsilon*1.3);

//xe2=-fc/(epsilon*epsilon);
xe2=-0.85*fc/(epsilon*epsilon);
xe2=-0.85*fc/(epsilon*epsilon*1.3);
//xeo=xel;
xeo=xel;
nn=1;

Ea=xes;
//cEb=xeo;
cEb=22500;
Gb=cEb/2.4;
Ga=Ea/2.6;

nombre_de_maille=code_systus("mmaxi");
mo=nombre_de_maille ;
mo?;

nombre_de_noeud=code_systus("nmax");
no=nombre_de_noeud;
no?;

pour ( i=1 ; i<=no ; i=i+1 )

    { acc=coordonnee_noeud(i);
      cx[i]=acc[1];
      cy[i]=acc[2]; }

pour ( i=1 ; i<=mo ; i=i+1 )
{dd[i]=hh[i]-dd1[i];
As[i]=0.000001*(A11[i]+AA[i]);
At[i]=b[i]*hh[i];
Ar[i]=5*At[i]/6;
Ab[i]=At[i]-As[i];}

pour ( i=1 ; i<=no ; i=i+1 )
{ ddu[i]=0;
```

---

```

        ddv[i]=0; }

//caracteristiques equivalentes
//-----
pour ( i=1 ; i<=mo ; i=i+1 )

{   xib[i]=b[i]*pow(hh[i],3)/12;
    xia[i]=0.000001*A11[i]*(hh[i]/2-dd1[i])*(hh[i]/2-
dd1[i])+0.000001*AA[i]*(dd[i]-hh[i]/2)*(dd[i]-hh[i]/2);}

pour ( i=1 ; i<=mo ; i=i+1 )

{   rEe[i]=(cEb*Ab[i]+Ea*As[i])/At[i];
    rGe[i]=(Gb*Ab[i]+Ga*As[i])/At[i];/** module equivalent de la section */
    xie[i]=(cEb*xib[i]+Ea*xia[i])/rEe[i];
    rGb[i]=cEb/2.4;
    rEb[i]=cEb;
    xiie[i]=xie[i]; }

ginertie=xie[1];ginertie?;

```

### INCREMENT DE CHARGE $\Delta P$

```

//demarrage de la boucle pour un pas de chargement
//*****

r=0;
pour(k=0 ; k<100 ; k=k+1)

{incr:

k=k+1;
si (k>14) r=r+0.0025;sinon
si (k>13) r=r+0.005;sinon
/*si (k>5) r=r+0.0125;sinon
si (k>5) r=r+0.005;sinon
si (k>3) r=r+0.025;sinon*/
    r=r+0.01 ;

    r?;

    si (r>0.150) aller a DAD;

    xvN=r*charN;
    xH=2*xvN*0.01;
    xvN1=xvN+xvN*0.01;
    xvN2=xvN-xvN*0.01;

charge=xvN;

    param$=parametre_fichier("2kss2.par");

    Pour (i=1 ; i<=no ; i=i+1 )

{xc=cx[i]+ddu[i];

```

---

```

textval$#=conversion_reel_systus(xc);

yc=cy[i]+ddv[i];
textval$#=conversion_reel_systus(yc);}

    Pour (i=1 ; i<=mo ; i=i+1 )
{xE=rEe[i];
    textval$#=conversion_reel_systus(xE);
    xi=xie[i];
    textval$#=conversion_reel_systus(xi);
xG=rGe[i];
    textval$#=conversion_reel_systus(xG);}
    textval$#=conversion_reel_systus(xH);
    textval$#=conversion_reel_systus(xvN2);
    textval$#=conversion_reel_systus(xvN1);

//  sprintf(n$,"/d",n);

    instancier_fichier("2kss2.par",param$,textval$,"2kss2.dat");

```

### **CALCUL ELASTIQUE LINEAIRE SYSTUS**

```

systus_fichier("2kss2.dat", "2kss2.resu");

k?;
//aller a DAD;

```

### **EFFORTS AU PREMIER ORDRE**

```

//extraction des efforts de la boucle des increments
//-----
pour ( i=1 ; i<=mo ; i=i+1 )
{

effort_trans_maille(1,i)?;
v=effort_trans_maille(1,i);

    xnn[i,1]=v[1];
    xnn[i,2]=-v[4];
    xt[i,1]=v[2];
    xt[i,2]=-v[5];
    xMm[i,1]=v[3];
    xMm[i,2]=-v[6];
    xMm12[i]=(v[3]-v[6])/2;
    xn[i]=-v[4];

}

```

### **MOMENT DU SECOND ORDRE**

---

```
//démarrage des iterations pour le calcul du second ordre
//*****

pour ( i=1 ; i<=mo ; i=i+1 )
    {eMM[i]=0;eM[i]=0;gm0[i]=0;}

pour (j=0 ; j<=jiter ; j=j+1 )

    {
simi:j=j+1;
//si (j>1) aller a Euler;
```

### TEST SUR LE NOMBRE D'ITERATIONS

```
si (j==jiter) { ecrire_fichier(na,"pas n°%d\n",k);
                ecrire_fichier(na,"iteration j=%d\n",j,"%s\n","divergence
d'equilibre");

                aller a DAD;}

si (lin==1) aller a Euler;
```

### NON LINEARITE MATERIELLE ET CORRECTION DES DEFORMATIONS

```
// boucle sur le nombre de mailles( pour le calcul de defo)
//-----

pour ( l=1 ; l<=mo ; l=l+1 )

    {xi=xie[l];
    xn[l]=-xn[l];
    xml[l]=abs(xMm12[l]);
    //xml[l]=xMm12[l];
    si (j==1) {xu=xn[l]/(rEb[l]*At[l]);
               xr=xml[l]/(rEb[l]*xib[l]); }

//          calcul des deformations et axe neutre
//          -----

    A1=A11[l]/1000000; A=AA[l]/1000000;
    xs=At[l];
    h=hh[l];

    d=dd[l];
    dl=ddl[l];
    Abb=Ab[l];

//          depart des iterations pour le calcul des efforts internes n et m
//          -----
```

---

```

xu?;
xr?;
pour(i=1 ; i<= iter ; i=i+1)
{
defsl=xu+xr*(h/2-d1);
defsf=xu-xr*(d-h/2);
// si (defsl >= 0.002 || defsf >= 0.002)
//{ecrire_ecran("\n/s", "acier plastifiant");
defsl?;
defsf?;

def0=sigmae/xes;

si (defsl<=def0 && defsf<=def0)

{vn=(xe1*xu+xe2*xu*xu)*xs+xe2*xr*xr*xi+A1*xes*(xu+xr*(h/2-
d1))+A*xes*(xu-xr*(d-h/2));

vm=(xe1*xr+2*xe2*xu*xr)*xi+A1*xes*(xu+xr*(h/2-d1))*(h/2-d1)-
A*xes*(xu-xr*(d-h/2))*(d-h/2);
vn?;
vm?;
za=(xe1+2*xe2*xu)*xs+(A1+A)*xes;
zb=2*xe2*xi*xr+(A1*(h/2-d1)-A*(d-h/2))*xes;
zc=zb;
zd=(xe1+2*xe2*xu)*xi+(A1*(h/2-d1)*(h/2-d1)+A*(d-h/2)*(d-h/2))*xes;
//ecrire_ecran("\n/s", "cas n=1");
aller a test;
}
sinon si (defsl<=def0 && defsf>=def0)
{vn=(xe1*xu+xe2*xu*xu)*xs+xe2*xr*xr*xi+A1*xes*(xu+xr*(h/2-
d1))+A*sigmae;
vm=(xe1*xr+2*xe2*xu*xr)*xi+A1*xes*(xu+xr*(h/2-d1))*(h/2-d1)-
A*sigmae*(d-h/2);
vn?;
vm?;
za=(xe1+2*xe2*xu)*xs+A1*xes;
zb=2*xe2*xi*xr+A1*(h/2-d1)*xes;
zc=zb;
zd=(xe1+2*xe2*xu)*xi+A1*(h/2-d1)*(h/2-d1)*xes;
// ecriture_ecran("\n/s", "cas n=2");
aller a test;
}
sinon si (defsl>=def0 && defsf<=def0)
{vn=(xe1*xu+xe2*xu*xu)*xs+xe2*xr*xr*xi+A1*sigmae+A*xes*(xu+xr*(d-
h/2));
vm=(xe1*xr+2*xe2*xu*xr)*xi+A1*sigmae*(h/2-d1)-A*xes*(xu+xr*(d-
h/2))*(d-h/2);
vn?;
vm?;
za=(xe1+2*xe2*xu)*xs+A*xes;
zb=2*xe2*xi*xr-A*xes*(d-h/2);
zc=zb;
zd=(xe1+2*xe2*xu)*xi+A*xes*(d-h/2)*(d-h/2);
// ecriture_ecran("\n/s", "cas n=3");
aller a test;
}
sinon vn=(xe1*xu+xe2*xu*xu)*xs+xe2*xr*xr*xi+A1*sigmae+A*sigmae;
vm=(xe1*xr+2*xe2*xu*xr)*xi+A1*sigmae*(h/2-d1)-A*sigmae*(d-h/2);
vn?;

```

---

---

```

        vm?;
        za=(xe1+2*xe2*xu)*xs;
        zb=2*xe2*xi*xr;
        zc=zb;
        zd=(xe1+2*xe2*xu)*xi;
        //ecrire_ecran("\n/s", "cas n=4");
test:
    wn=xn[1]-vn;
    wm=xm1[1]-vm;
    wn?;
    wm?;

    si (wn<=epsi && wm<=epsi)
        {deffs1=deffs1;
        deffs=deffs;
        aller a resultat;}
    sinon si (i==iter) {ecrire_fichier(na,"pas n°%d\n",k,"iteration
j=%d\n",j);
                                ecrire_fichier(na,"iteration i=%d\n",i,"%s\n","non
equilibre de la section");
                                pour (i=1 ; i<=no ; i=i+1 )
                                { ecrire_fichier(na,"%f\b",uu[i]);}
                                //ecrire_fichier(na,"%f\b",vv[i]);
                                //ecrire_fichier(na,"%f\n",ww[i]);
                                aller a DAD;}

//calcul de l'application lineaire tangente at1
    sinon at1[1,1]=za;
        at1[1,2]=zb;
        at1[2,1]=zc;
        at1[2,2]=zd;
        at2=inversion_matrice(at1);

    wu=at2[1,1]*wn+at2[1,2]*wm;
    wr=at2[2,1]*wn+at2[2,2]*wm;
wu?;
wr?;

    xu=xu+wu;
    xr=xr+wr;
xu?;
xr?;

fsup=xu+xr*h/2;
finf=xu-xr*h/2;
fsup?;
finf?;
si (fsup>=0.0035) ecrire_fichier(na,"pas n°%d\n",k,"iteration j=%d\n",j,"maille
l=%d\n",l);

//      fin des iterations pour le calcul des deformations
//      -----

```

---

## CARRACTERISTIQUES EQUIVALENTES

```

}
resultat:
  l?;

//axe neutre "yu"

  yu=xu/xr+h/2;
  yuu[l]=yu;
  //  xxu[l]=(4*xu+fsup)/5;

//caracteristiques equivalentes
//-----
//si (xu<epsilon) sigma=xel*xu+xe2*xu*xu;
//sinon sigma=23533.333;

//sigma=xel*xu+xe2*xu*xu;
rEb[l]=xel+2*xe2*xu;
//rEb[l]=sigma/xu; /*nouveau module du béton*/
rEbe[l]=(rEb[l]*Abb+Ea*As[l])/At[l]; /*nouveau module equivalent de la section
*/
rGb[l]=rEb[l]/2.4;
rGbe[l]=(rGb[l]*Abb+Ga*As[l])/At[l];
si (yu>=h) xiie[l]=xie[l];
sinon {
xib[l]=b[l]*yu*yu*yu/3-b[l]*yu*(yu-h/2)*(yu-h/2);
//xib[l]=b[l]*yu*yu*yu/12+b[l]*yu*(yu-h/2)*(yu-h/2);
//xib[l]=b[l]*yu*yu*yu/12+b[l]*yu*(h/2-yu/2)*(h/2-yu/2);
//xia[l]=A1*(h/2-dl)*(yu/2-dl)+A*(d-h/2)*(d-h/2);

xiie[l]=(rEb[l]*xib[l]+Ea*xia[l])/rEbe[l]; }

rEbe[l]?;

  xn[l]=-xn[l];
  //  xiie[l]?;
}
// fin de la boucle l sur le nombre de mailles

si (j==1) { pour ( i=1 ; i<=mo ; i=i+1 ) {rEe[i]=rEbe[i];
/* a garder pour le pas suivant*/
                                xie[i]=xiie[i];
                                rGe[i]=rGbe[i];} }

```

## NON LINEARITE GEOMETRIQUE

### Calcul des déplacements (Bresse)

Euler:

```

//deplacements
//*****

```

---

```

    dep=deplacement_trans_noeud(1,1);

du[1]=dep[1];
dv[1]=dep[2];
dw[1]=dep[3];
//dus[1]=dep[1];
//dvs[1]=dep[2];

pour ( i=1 ; i<=no ; i=i+1 )
    {
        ac=coordonnee_noeud(i);
        coor1=ac[1];
        coor2=ac[2];
        xx[i]=coor1;
        yy[i]=coor2;
    }

/*pour ( i=1 ; i<=no ; i=i+1 )
    { depp=deplacement_trans_noeud(1,i);

cdu[i]=depp[1];
cdv[i]=depp[2];
cdw[i]=depp[3];
    }*/

yy?;

pour (i=1 ; i<=mo ; i=i+1 )

    { asin[i]=(yy[i+1]-yy[i])/sqrt((xx[i+1]-xx[i])*(xx[i+1]-xx[i])+(yy[i+1]-yy[i])*(yy[i+1]-yy[i]));

        acos[i]=(xx[i+1]-xx[i])/sqrt((xx[i+1]-xx[i])*(xx[i+1]-xx[i])+(yy[i+1]-yy[i])*(yy[i+1]-yy[i]));

    }

pour (i=1 ; i<=mo ; i=i+1 )

{dx[i]=sqrt((xx[i+1]-xx[i])*(xx[i+1]-xx[i])+(yy[i+1]-yy[i])*(yy[i+1]-yy[i]));}
dx?;

//simpson
//-----
pour (i=1 ; i<=mo ; i=i+1 )
    {
du[i+1]=du[i]-dw[i]*(yy[i+1]-yy[i])+acos[i]*dx[i]*(xnn[i,1]+xnn[i,2])/(2*rEe[i]*At[i])-
asin[i]*dx[i]*(xt[i,1]+xt[i,2])/(2*rGe[i]*Ar[i])-
dx[i]/(6*rEe[i]*xie[i])*(2*xMm[i,1]+xMm[i,2])*(yy[i+1]-yy[i]);

dv[i+1]=dv[i]+dw[i]*(xx[i+1]-xx[i])+asin[i]*dx[i]*(xnn[i,1]+xnn[i,2])/(2*rEe[i]*At[i])+acos[i]*dx[i]*(xt[i,1]+xt[i,2])/(2*rGe[i]*Ar[i])+dx[i]/(6*rEe[i]*xie[i])*(2*xMm[i,1]+xMm[i,2])*(xx[i+1]-xx[i]);

dw[i+1]=dw[i]+(xMm[i,1]+xMm[i,2])/(rEe[i]*xie[i])*(dx[i]/2);

```

---



---

```

si (i==12) dv[i+1]=0;

/*ecrire_fichier(n,"maille %d\n",i);
ecrire_fichier(na,"xn[i]=%f\b",xn[i],"xt[i]=%f\b",xt[i],"xMm[i,1]=%f\b",xMm[i,1],
"xMm[i,2]=%f\b",xMm[i,2]);
ecrire_fichier(na,"du[i]=%f\b",du[i],"dv=%f\b",dv[i],"dw[i]=%f\b",dw[i],"dx[i]=%f\b",dx[i]);
ecrire_fichier(na,"yy[i]=%f\b",yy[i],"yy[i+1]=%f\b",yy[i+1],"xx[i]=%f\b",xx[i],
"xx[i+1]=%f\b",xx[i+1]);
ecrire_fichier(na,"At[i]=%f\b",At[i],"Ar=%f\b",Ar[i],"rEe[i]=%f\b",rEe[i],"rGe[i]=%f\b",rGe[i],
"xie[i]=%f\b",xie[i]);*/

}

du[32]=0.0;
dv[32]=0.0;

pour ( i=1 ; i<=no ; i=i+1 ){si (j==1)

{ddu[i]=ddu[i]+du[i];
ddv[i]=ddv[i]+dv[i];} sinon
{ddu[i]=/*ddu[i]+*/du[i];
ddv[i]=/*ddv[i]+*/dv[i];}}
/*a recuperer pour remaillage du pas suivant*/

asin[6]?;acos[6]?;du?;dv?;dw?;

si (j==1)
{
ecrire_fichier(na,"%d\n",k,"%f\n",charge);
pour (i=1 ; i<=no ; i=i+1 )
{ecrire_fichier(na,"%d\b",i);
ecrire_fichier(na,"%f\b",cx[i]);
ecrire_fichier(na,"%f\b",cy[i]);
ecrire_fichier(na,"%f\b",du[i]);
ecrire_fichier(na,"%f\b",dv[i]);
ecrire_fichier(na,"%f\b",dw[i]);
}
//ecrire_fichier(na,"xu=%f\b",xu,"fsup=%f\b",fsup,"finf=%f\b",finf);
}

initialiser_liste(textval$);

//si (k==1) aller a DAD;
//sinon aller a incr;

```

### **Actualisation du maillage**

```

nn=n;
n=1;
parram$=parametre_fichier("2kss4.par");

pour ( i=1 ; i<=no ; i=i+1 )

{xc=cx[i]+ddu[i]+du[i];
texttval$#=conversion_reel_systus(xc);

```

---

```

        yc=cy[i]+ddv[i]+dv[i] ;
        texttval$#=conversion_reel_systus(yc);
    }

pour ( i=1 ; i<=mo ; i=i+1 )

    { xE=rEe[i];
      texttval$#=conversion_reel_systus(xE);
      xi=xie[i];
      texttval$#=conversion_reel_systus(xi);
    xG=rGe[i];
      texttval$#=conversion_reel_systus(xG);}
      texttval$#=conversion_reel_systus(xH);
      texttval$#=conversion_reel_systus(xvN2);
      texttval$#=conversion_reel_systus(xvN1);

      //sprintf(n$,"/d",n);
//      texttval$#=n$;
      instancier_fichier("2kss4.par",parram$,texttval$,"2kss4.dat");
r?;

```

## STABILITE

### Calcul du moment du second ordre

```

// Calcul et Test sur le moment du second ordre
// -----

```

```

      systus_fichier("2kss4.dat","2kss4.resu");

```

```

Pour ( i=1 ; i<=mo ; i=i+1 )

```

```

    {vv=effort_trans_maille(1,i);

```

```

      xnn[i,1]=vv[1];
      xnn[i,2]=-vv[4];
      xt[i,1]=vv[2];
      xt[i,2]=-vv[5];
      xMm[i,1]=vv[3];
      xMm[i,2]=-vv[6];
      xMm12[i]=(vv[3]-vv[6])/2;

```

```

      eMM[i]=eM[i];
      eM[i]=abs(xMm12[i]);
      si (j==1) eMR[i]=eM[i];
      si (j==2) eMR[i]=eM[i];

```

```

eM[i]?; eMM[i]?;eMR[i]?;
i?;

```

---

```
//lire_ecran("/d",n);
}
// si (j==1) {pour (i=1; i<=mo ; i=i+1) {eMR[i]=eM[i];}}
```

### Test de stabilité

```
pour (i=1; i<=mo ; i=i+1)
{dM[i]=(eM[i]-eMM[i])/eM[i];dM[i]?;}

//si (k==13 && j==1) aller a DAD;

pour (i=1; i<=mo ; i=i+1)
  {si (abs(dM[i])>=0.001) {initialiser_liste(texttval$);
                           aller a simi;}sinon si (i==mo)
                           {initialiser_liste(textval$);
                             aller a incr;}
  }
  initialiser_liste(texttval$);
}
//fin des iterations j pour le calcul du Memt de 2eme ordre
//-----
  initialiser_liste(textval$);
}
//Fin des incrementations k

DAD:
/*k?;j?; l?;
yuu?;
Ab?; As?; At?; xib?; xia?; cEb?; rEb[1]?; rEe[1]?; xie[1]?;rEb[1]?; xiie[1]?;
ginertie?;
//xiie?; xie?; ginertie?;
Abb?;//As?;
fsup?;
finf?;
yc?; xE?;
xi?;asin[8]?;*/asin[3]?;asin[10]?;asin[16]?;asin[17]?;asin[18]?;acos[3]?;acos[1
0]?;acos[18]?;dep[1]?;dep[2]?;//reper?;//RR?;

//rGe?;
//dx?;
//xn?;
//xMm?;
Ar?;

fermer_fichier(na);
```

## Annexe 2 : Principes des règles de calcul du BAEL pour le flambement des structures en béton armé

Cette annexe présente les principes retenus pour l'établissement des règles de calculs de tenue au flambement des structures en béton armé.

La faible résistance du béton à la traction ainsi que sa déformation limitée vis à vis de la compression ont longtemps laissé penser que la ruine d'une section en béton armé étaient toujours due à un dépassement de la capacité du matériau à supporter les sollicitations qui lui sont imposées. Dans les premiers règlements de béton armé, le problème d'instabilité était donc résolu en flexion composée, les sections étant sollicitées par un effort normal  $N$  et un moment fléchissant  $M$ .

Dans le plan des sollicitations ( $N$ ,  $M$ ), était définie une courbe frontière appelée diagramme d'interaction. Cette courbe était obtenue avec les valeurs des couples (effort normal, moment fléchissant) évalués dans les conditions de rupture. Elle délimite le domaine de résistance de la section en béton armé, comme illustré sur la figure A2-1.

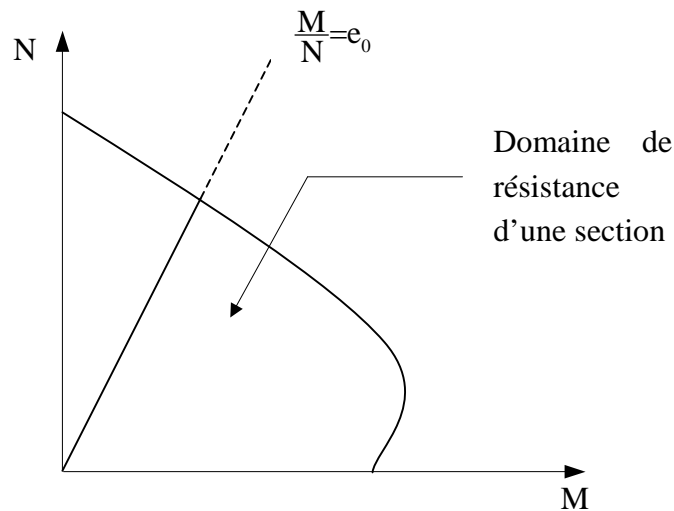


Figure A2-1 . Diagramme d'interaction moment fléchissant -effort normal

Le moment correspondant à la ruine  $M_1$  était ensuite majoré par une valeur additionnelle  $M_2$  telle que le moment total  $M$  nécessaire au dimensionnement vérifiait :

$$M = M_1 + M_2$$

Cette correction s'interprète également comme une majoration de l'excentrement  $e_0$  de l'effort normal par une excentricité additionnelle  $e_a$  telle que :

$$M = N e_0 + N e_a = M_1 + M_2$$

Cette partie additionnelle  $M_2 = N e_a$  correspond au moment dit du second ordre tel que nous l'avons introduit au chapitre 2.

Ce principe de correction à posteriori ne permet cependant pas de prédire les cas observables de ruine par flambement. Cette insuffisance a été observée par Feassel [FEA72] qui a effectué une étude expérimentale comparative sur deux poteaux en béton armé, de même excentricité initiale  $e_0$ , et sollicités en flexion composée. Les deux poteaux diffèrent par leur élancement. Pour chacun d'eux, la courbe de chargement a été reportée sur le diagramme d'interaction de la section la plus sollicitée.

Pour le poteau de plus faible élancement, la figure A2-2 montre que la courbe expérimentale de chargement s'incurve et rencontre le diagramme d'interaction. Expérimentalement, on observe bien une ruine du poteau par épuisement des matériaux dans la section la plus sollicitée.

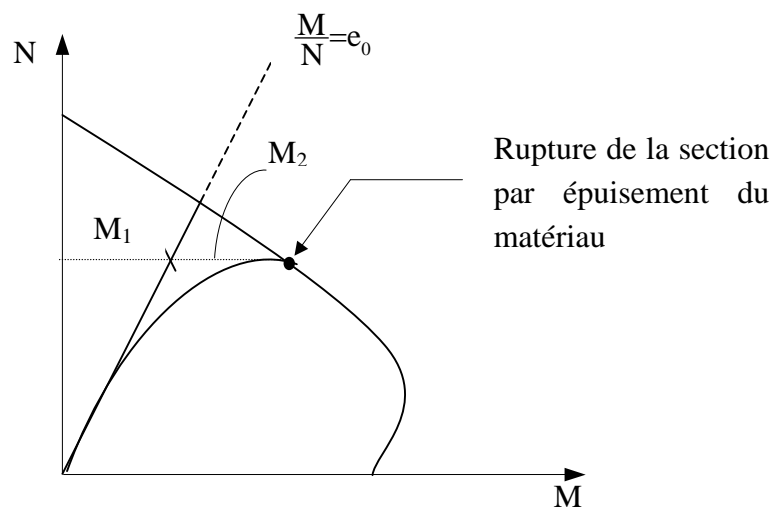


Figure A2-2. Illustration de la ruine par épuisement des matériaux

Pour le poteau le plus élancé, la courbe expérimentale de chargement, reportée sur la figure A2-3, s'incurve, passe par un maximum, mais ne rencontre pas le diagramme d'interaction. Expérimentalement, on observe la ruine de la structure alors que la section la plus sollicitée est encore dans son domaine de résistance. Il y a eu flambement par divergence d'équilibre.

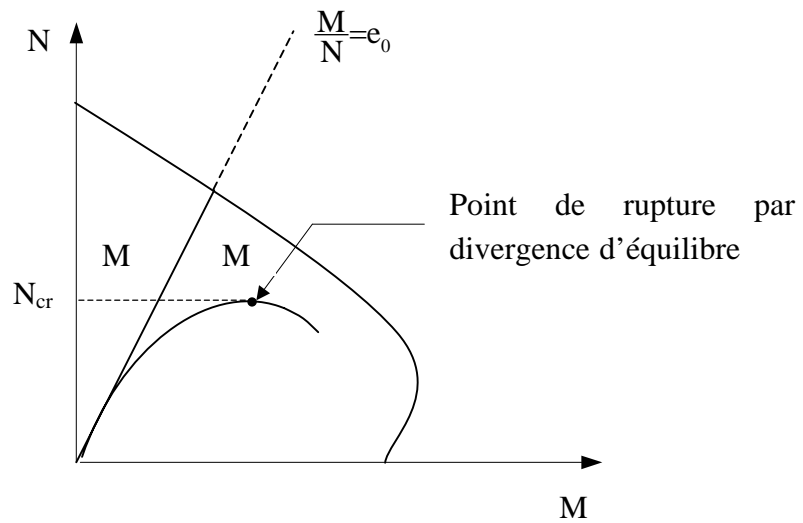


Figure A2-3. Illustration de la ruine par divergence d'équilibre

Ces courbes montrent l'insuffisance que présente l'utilisation seule du moment du premier ordre  $M_1$  dans les calculs prévisionnels. Ces constatations ont donné lieu à un nouveau type de calcul au flambement intégré dans les nouveaux règlements BAEL 83 et BAEL 90, [PER92]. Il consiste à prendre en compte les moments du second ordre dans les sollicitations externes à équilibrer pour les sections droites en béton armé. Cette prise en compte des termes du second ordre dans les calculs de stabilité permet ainsi de discerner les cas de ruine par épuisement des matériaux de ceux se produisant par flambement.

A partir de ces règlements et d'hypothèses simplificatrices, P.Feassel, A.Morisset et B.Fouré [FEA72] ont établi des abaques donnant les charges ultimes de flambement de poteaux en béton armé soumis à un effort normal excentré. Ces abaques ont été complétés par A.Capra [CAP75] en introduisant un effort externe supplémentaire horizontal.

